Equation du second degré.

I) Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ et s'appelle le discriminant du trinôme : $ax^2 + bx + c$
On a donc. $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Exemples :

• Calculer le discriminant de $3x^2 - 5x + 1$:
Réponse : $\Delta = (-5)^2 - 4(3)(1)$
$\Delta = 13$

• Calculer le discriminant de $x^2 - 3x + \frac{3}{2}$:
Réponse : **$\Delta = 3$**

• Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$:
Réponse : **$\Delta = -9$**

II) Equation du second degré : a x ² + b x + c = 0 avec a ≠ 0 .

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré (a ≠ 0) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

L'existence de solutions pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la factorisation du polynôme dépendent du signe de Δ .

Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans R : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique dans R : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans R
Le trinôme se factorise de la façon suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Le trinôme se factorise de la façon suivante : $f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x)$ n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.

Remarques :

On appelle **racine** du polynôme $a x^2 + b x + c$ **toute solution** de l'équation :

$$a x^2 + b x + c = 0 .$$

Exemples :

Déterminer si les polynômes suivants admettent des racines ;
si oui en donner une factorisation.

1) $f(x) = x^2 - x - 6$;

2) $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$;

3) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$;

4) $j(x) = x^2 - x + 1$;

5) $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = x^2 \pm mx + (m-1)$

Réponses :

Pour f :

$\Delta = 25$,

le polynôme admet 2 racines -2 et 3 ,
on a donc : $\boldsymbol{f(x) = (x+2)(x-3)}$

Pour g :

Tout d'abord factorisons par 5 : $g(x) = 5\,(x^2 - 8x + 7)$
$\Delta = 36$,

le polynôme admet 2 racines : 1 et 7 ,
on a donc : $\boldsymbol{g(x) = 5(x-1)(x-7)}$

Pour h :

$\Delta = 0$,

le polynôme admet 1 une racine $\frac{1}{3}$,

on a donc : $\boldsymbol{h(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}$;

Pour j :

$\Delta = -3$,

le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ et **n'est pas factorisable.**

Pour k :

$\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2$

le polynôme admet une racine si $m = 2$ et deux racines si $m \neq 2$