Extremums d’une fonction

I) Définitions (rappels de seconde : voir la fiche de cours correspondante)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D inclus dans P, m et M deux réels.

• M est le maximum de f sur D si et seulement si $f(x) \leq M$ pour tout x de D, et s’il existe un réel α dans D tel que $f(\alpha) = M$.

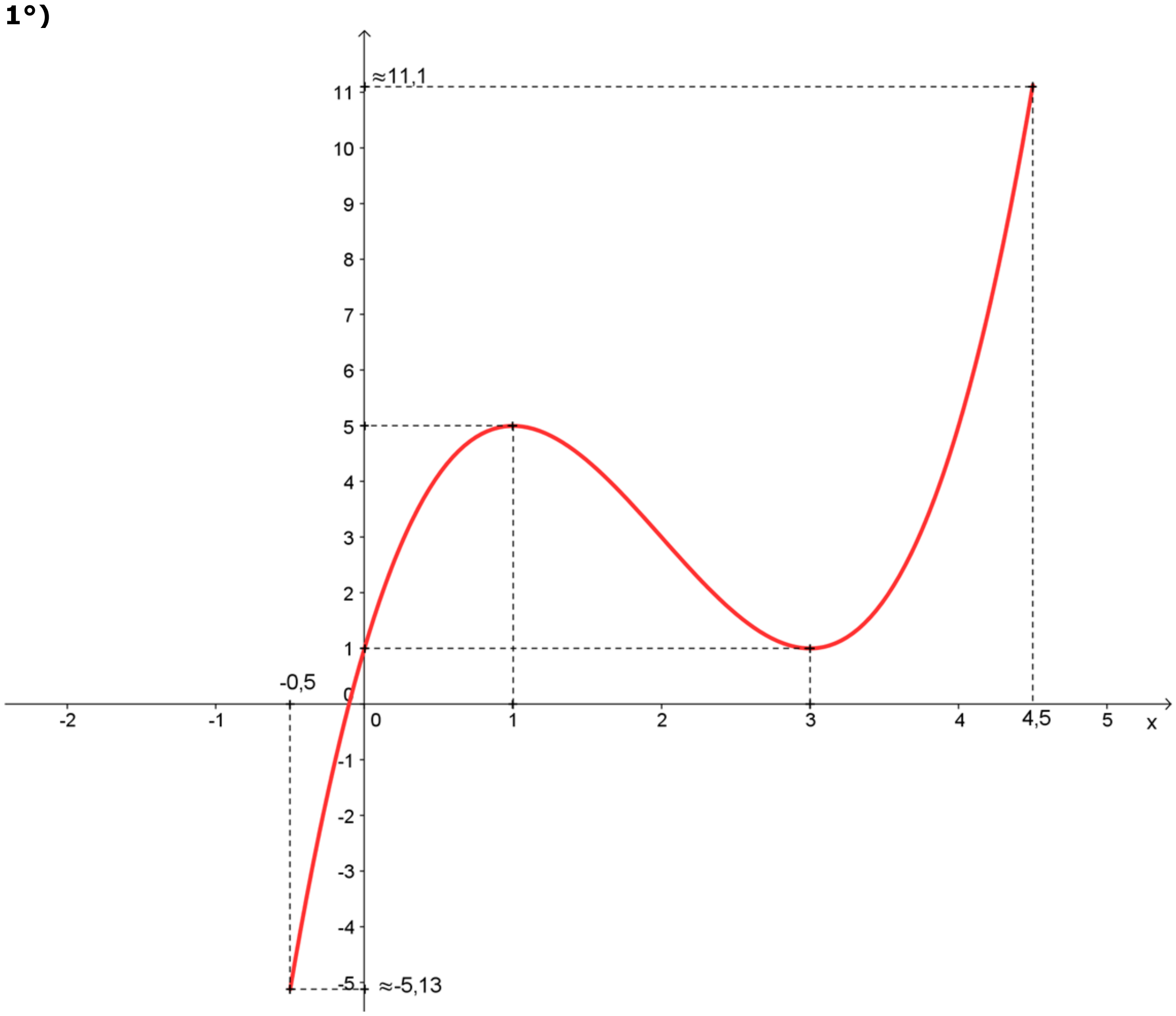
• m est le minimum de f sur D si et seulement si $f(x) \geq m$ pour tout x de D, et s’il existe un réel α dans D tel que $f(\alpha) = m$.

• On appelle extremum de f sur D son maximum ou son minimum (s’il existe).

• Si m ou M est un extremum de f sur un intervalle I ouvert inclus dans D, on dit que m ou M est un extremum local de f sur D

Exemples

1°)

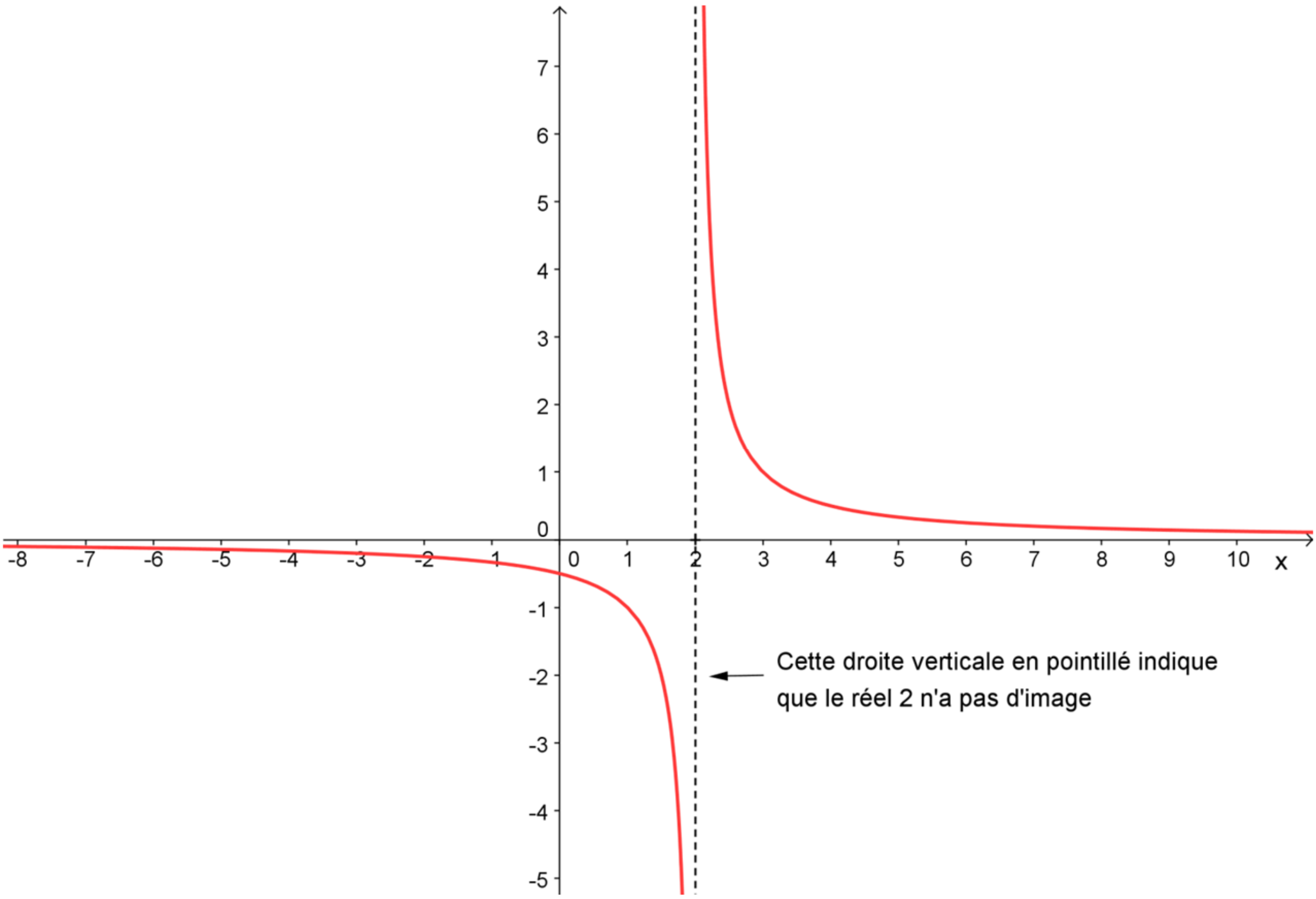


La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle D = [-0,5 ; 4,5]

Sur D, f admet un minimum $m = f(-0{,}5) \approx -5{,}13$ et un maximum $M = f(4{,}5) \approx 11{,}1$

Sur I =] 0 ; 4 [intervalle ouvert contenu dans D, f admet un minimum local $a = f(3) = 1$ et un maximum local $A = f(1) = 5$

2°)



La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'ensemble D =] -∞ ; 2 [∪] 2 ; + ∞ [
Sur D, f admet ni minimum, ni maximum.

II) Extremums et dérivée

Propriété :

Si une fonction f, dérivable sur un intervalle I, admet un extremum en α sur I et si α n'est pas une borne de I alors $f'(\alpha)$ = 0

Démonstration :

Supposons que f admette un maximum en α, α n'étant pas une borne de I.

Il existe un intervalle ouvert J inclus dans I autour de α tel que $f(\alpha)$ soit le maximum de f sur J.
Pour h assez voisin de 0, $\alpha + h \in J$ et donc $f(\alpha + h) \leq f(\alpha)$

Alors pour $h > 0$ $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \leq 0$ et pour $h < 0$ $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \geq 0$

La fonction f est dérivable sur I $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ admet une limite $f'(\alpha)$ quand h tend vers 0 et les rapports $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ étant aussi bien positifs que négatifs $f'(\alpha)$ ne peut être que 0.

Démonstration analogue pour un minimum.

Attention :

La réciproque de cette propriété est fausse : de $f'(\alpha) = 0$ on ne peut pas déduire que f admet un extremum en α. (Voir exemple ci-dessous)

Exemple :

La fonction $f(x) = x^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$ sans que la fonction ait d'extremum en ce point.

En revanche :

si f' s'annule en changeant de signe en un réel α, α n'étant pas une borne de I, alors f admet un extremum local en α puisque f est :

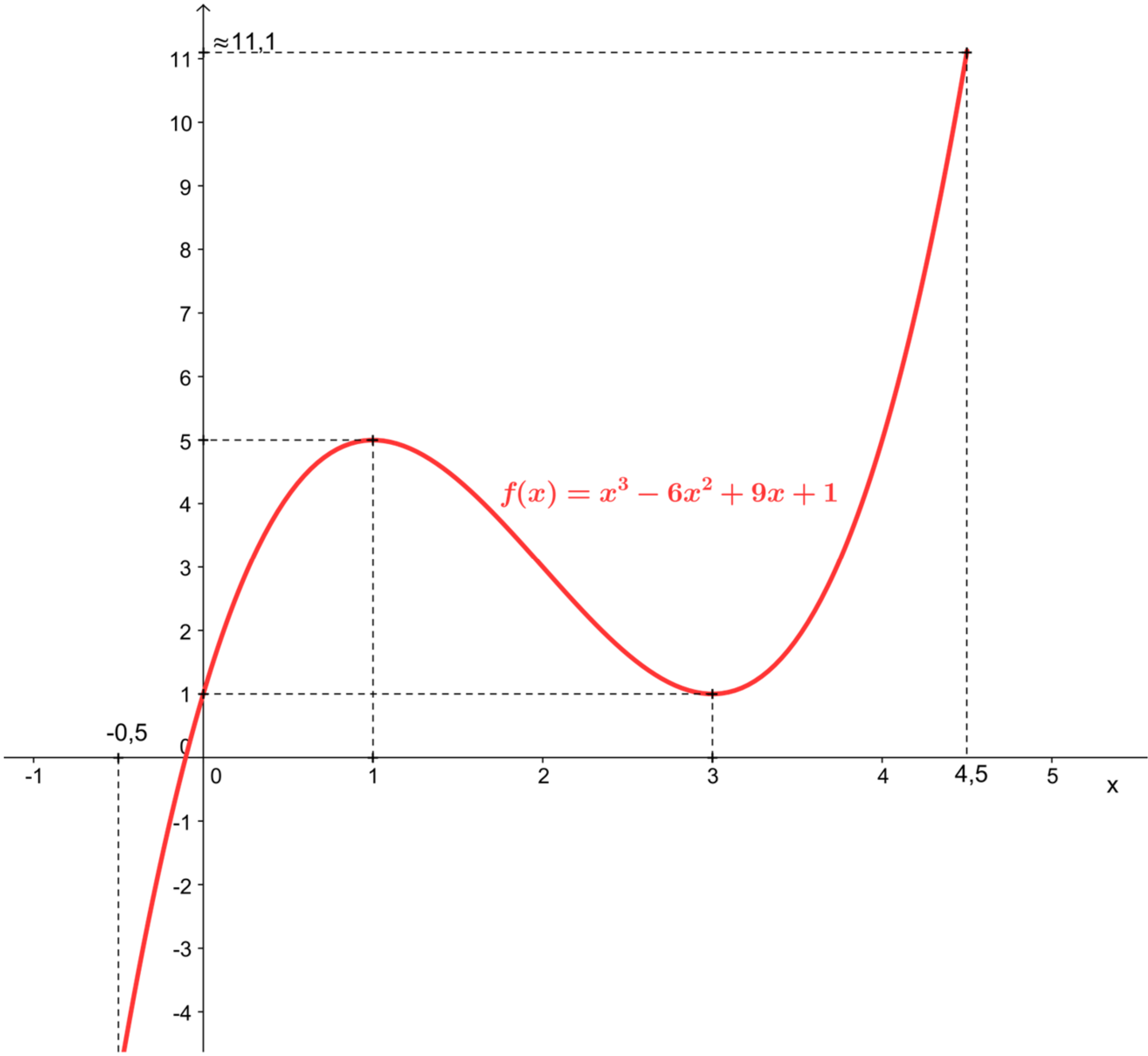
- **Soit croissante avant α et décroissante après (maximum local en α)**
- **Soit décroissante avant α et croissante après (minimum local en α)**

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur I = [– 0,5 ; 4,5] par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

f est dérivable sur I (fonction polynôme)

dont la représentation graphique est :



Graphiquement on conjecture que f admet un maximum en $x = 1$ et un minimum en $x = 3$ (ces points n'étant pas des bornes de l'intervalle de définition).

Montrons que la dérivée f' s'annule en $x = 1$ et en $x = 3$

On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(1) =$ 3 – 12 + 9 = 0 et $f'(3) =$ 27 – 36 + 9 = 0

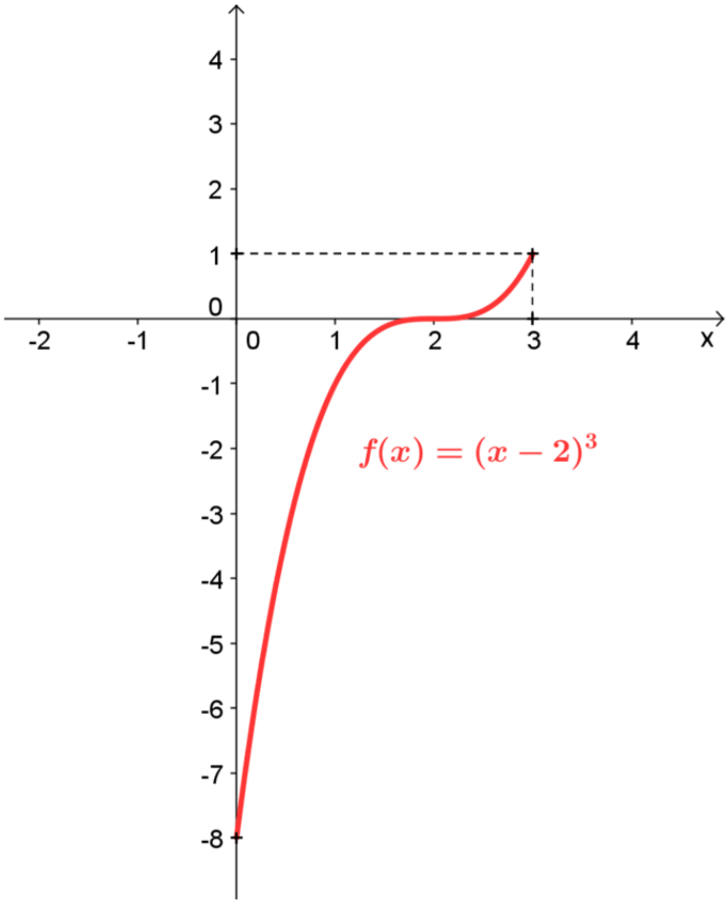
La propriété est bien vérifiée.

2) Exemple montrant la nécessité de l'hypothèse « α n'est pas une borne de l'intervalle I »

Soit la fonction f définie sur I = [0 ; 3] par $f(x)$ =$(x-2)^3$.

f est dérivable sur I (fonction polynôme)

dont la représentation graphique est :



f admet un minimum en 0 et un maximum en 3 qui sont les bornes d' l'intervalle de définition.

On a $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ donc $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

Donc $f'(0) = 12$ et $f'(3) = 3$ ces deux valeurs ne sont pas nulles.

3) Exemple montrant que la réciproque est fausse

En reprenant l'exemple précédent on peut calculer $f'(2)$ = 3 x 4 – 12 x 2 + 12 = 0 et pourtant x = 2 n'est pas un extremum de f

4) En lisant un tableau de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur I = $[-4\,;\,6]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

x	– 4	0	2	6
Variations de f	5	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 3	$\searrow$ 1

La lecture de ce tableau nous permet d'affirmer :

• Que f admet sur I un maximum en $x = -4$ et un minimum en $x = 0$

• Que sur $]-1\,;\,3[$ f admet un maximum local en $x = 2$ et un minimum en $x = 0$ et que par conséquence $f'(0)$ = 0 et $f'(2)$ = 0

• En outre on peut affirmer que $f('x) \geq 0$ sur [0 ; 2] et $f'(x) \leq 0$ sur $[-4\,;\,0]$ et sur [2 ; 6].

III) Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I = $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 3x - 2$

On appelle (C) la courbe représentative de f

a) Expliquer pourquoi f est dérivable sur I

b) Calculer $'(x)$, f' désignant la dérivée de f

c) Montrer que $f\,'(x) = (x-1)^2(x+3)$ pour tout x de I

d) En déduire le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variation de f

e) La fonction f admet-elle des extremums sur I ? En quels points ?

f) La fonction f admet-elle un extremum local en x = 1 ?

g) Donner une équation des tangentes à (C) aux points d'abscisses x = -3 ; x = 0 et x = 1

h) Représenter (C) et les trois tangentes de la question précédente (On prendra comme unités graphiques 3cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Solution :

a) f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I inclus dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4\,\frac{x^3}{4} + 3\,\frac{x^2}{3} - 5\,\frac{2x}{2} + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

On développe $(x-1)^2(x+3) = (x^2-2x+1)(x+3)$ $= x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + x + 3$

$$= x^3 + x^2 - 5x + 3 = f'(x)$$

On va donc étudier le signe de $(x-1)^2(x+3)$ sur I

x	-4		- 3		1		3
Signe de $(x-1)^2$		+		+	0	+	
Signe de $(x+3)$		−	0	+		+	
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	+	

Dressons le tableau de variations de f :

x	-4		-3		1		3
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	+	
Variations de f	$-\frac{34}{3}$	↘	$-\frac{89}{4}$	↗	$-\frac{11}{12}$	↗	$\frac{55}{4}$

e) La fonction f admet un minimum en $x = -3$ et un maximum en $x = 3$; pour le minimum comme ce n'est pas une borne de l'intervalle de définition $f'(-3) = 0$ mais pour le maximum comme c'est une borne de l'intervalle de définition : $f'(3) \neq 0$

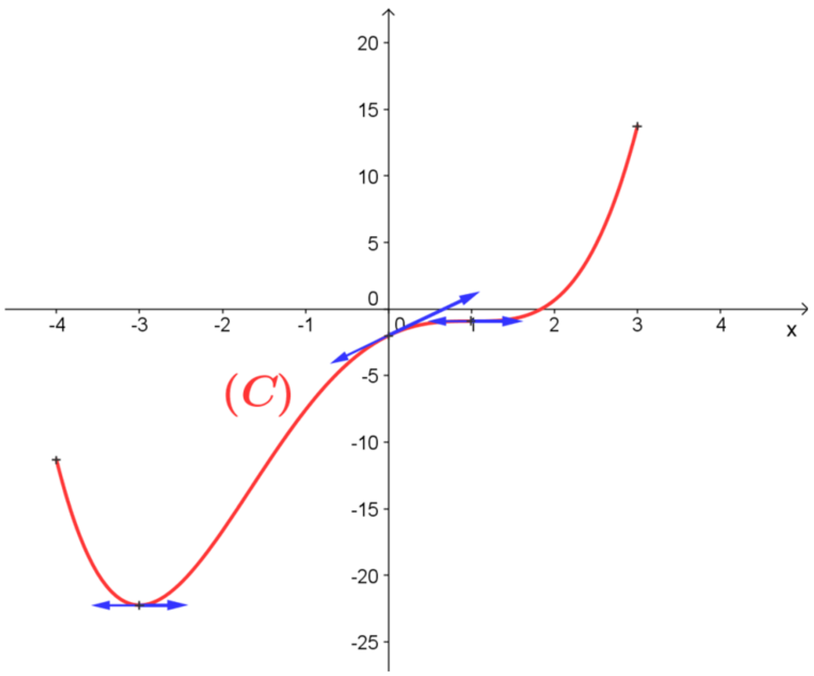
f) Non f n'admet pas d'extremum en $x = 1$ pourtant $f'(1) = 0$ mais f' ne change pas de signe en $x = 1$

g) En $x = -3$ $f'(-3) = 0$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{89}{4}$ elle est horizontale

En $x = 0$ $f'(0) = 3$ et $f(0) = -2$ donc comme la tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ son équation est $y = 3x - 2$

En $x = 1$ $f'(1) = 0$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{11}{12}$ elle est horizontale.

h) Courbes



IV) Problèmes d'optimisation

Exemple :

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit. Sa capacité de productions est de 20 tonnes.
Le coût **en millier d'euros,** d'une production de x tonnes est donné par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$$

1a. Etudier les variations de C sur [0 ; 20] puis dresser son tableau de variation sur cet intervalle.

1b. Tracer la représentation graphique de C dans un repère orthogonal (unités 1 cm sur l'axe des abscisses pour 1 tonne et 1 cm sur l'axe des ordonnées pour 200 **milliers d'euros**

2. En économie on appelle coût moyen (noté C_M) le coût de fabrication d'une tonne de produit lorsque x tonnes sont produites.

C'est à dire : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

2a. Etudier le sens de variation de la fonction C_M sur l'intervalle [0 ; 20] puis dresser son tableau de variation sur cet intervalle.

2b. En déduire le coût moyen minimal.

3. Après avoir fait une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 84 000 euros la tonne

3a.Exprimer le bénéfice réalisé par l'entreprise en fonction de x

3b.Quelle doit être la production x de l'entreprise pour qu'elle réalise un bénéfice maximal ?

3c. Est-ce la même valeur qui minimise le coût moyen ?

Réponse :

1a. $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$ Sa dérivée est donc :

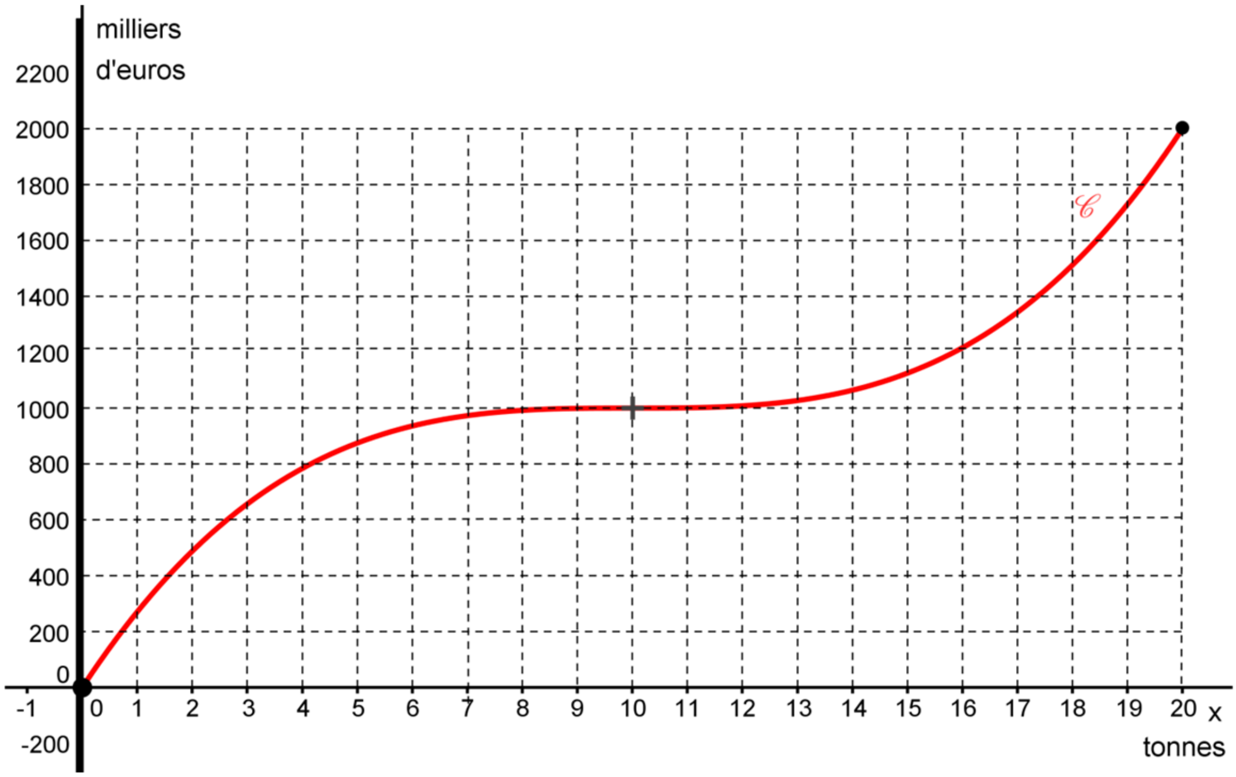
$C'(x) = 3x^2 - 60x + 300 = 3(x^2 - 20x + 100) = 3(x - 10)^2$

Donc $C'(x) = 0$ pour $x = 10$ et $C'(x) > 0$ sur [0 ; 20]

La fonction C est donc croissante sur [0 ; 20]

x	0	10	20
$C(x)$	0 ↗	1 000 ↗	2 000

1b.



2. Pour tout $x \neq 0$, $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3 - 30x^2 + 300x}{x} = x^2 - 30x + 300$

2a. Pour tout $x \neq 0$, $C'_M(x) = 2x - 30$

$C'_M(x) = 0$ lorsque $2x - 30 = 0$ c'est-à-dire lorsque $x = 15$

$C'_M(x) \leq 0$ pour $x \leq 15$ et $C'_M(x) \geq 0$ pour $x \geq 15$

La fonction C_M est donc décroissante sur [0 ;15] et croissante sur [15 ; 20]

On obtient le tableau de variation :

x	0		15		20
$C_M(x)$	300	$\searrow$	75	$\nearrow$	2 000

2b. La fonction C_M admet un minimum en $x = 15$ qui est 75.

Le coût moyen minimal est de 75 milliers d'euros.

3a. Il vend 84 milliers d'euros la tonne. La vente **en millier d'euros,** d'une production de x tonnes est donné par : $V(x) = 84\,x$

Son coût total de fabrication est : $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$

Son bénéfice est donc : $B(x) = V(x) - C(x)$

$B(x) = 84x - x^3 + 30x^2 - 300x = -x^3 + 30x^2 - 216x$

3b. $B'(x) = -3x^2 + 60x - 216 = 3(-x^2 + 20x - 72)$

$B'(x) = 0$ lorsque $-x^2 + 20x - 72 = 0$

$\Delta = 20^2 - 4 \times (-1) \times (-72) = 112$

$\Delta > 0$ donc $B'(x) = 0$ pour $x_1 = \frac{-20 + \sqrt{112}}{-2} = 10 - \sqrt{28} > 0$ et $x_2 = \frac{-20-\sqrt{112}}{-2} = 10+\sqrt{28} > 0$

$x_1 \approx 4{,}7$ et $x_2 \approx 15{,}29$

On obtient le tableau de variation :

x	0		$10 - \sqrt{28}$		$10+\sqrt{28}$		20
$B'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$B(x)$	0	$\searrow$	$B(10 - \sqrt{28})$	$\nearrow$	$B(10 + \sqrt{28})$	$\searrow$	-320

$B(10 - \sqrt{28}) \approx -456{,}32$ et $B(10 + \sqrt{28}) \approx 136{,}324$

Son bénéfice est maximal pour une production de $10+\sqrt{28}$ (c'est-à-dire environ 15,29) tonnes de produit et il sera de **136,324 milliers d'euros.**

3c. Cette valeur est très proche de celle qui minimise le coût moyen qui est de 15 tonnes.

Représentations graphiques :