Fonction cube.

I) Définition

Soit f la fonction définie sur un $\mathbb{R}$ par :

$$x \in \mathbb{R}, f(x) = x \times x \times x = x^3$$

Exemples :

$f(2) = 2^3 = 8$

$f(10^4) = (10^4)^3 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000 = mille\ milliards\,!$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

$f(1{,}111) = 1{,}371\,330\,631$

II) Etude de la fonction cube

1) Variations de f sur $\mathbb{R}$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut reformuler le théorème ainsi :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

Preuve. Soit deux réels a et b.

Tout d'abord montrons que $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$.

En développant $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ on obtient :

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

On a donc finalement :$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3}$

• Lorsque les deux nombres a et b ont le même signe :

- Premier cas : on suppose $0 \leq a < b$.

Alors $a - b < 0$ et $a^2 + ab + b^2 > 0$ comme somme et produit de nombres positifs

Donc $(a-b)(a^2+ab+b^2) < 0$

On obtient donc $a^3 - b^3 < 0$

Donc finalement :

$$0 \leq a^3 < b^3$$

C'est-à-dire :

$$0 \leq f(a) < f(b)$$

- Second cas: on suppose $\boldsymbol{a < b \leq 0}$

Alors $a - b < 0$

Or ab est positif comme produit de deux nombres négatifs. a^2 et b^2 sont aussi positifs, donc :

$a^2 + ab + b^2 > 0$ comme sommes de nombres positifs

Donc $(a - b)(a^2 + ab + b^2) < 0$

On obtient donc $a^3 - b^3 < 0$

Donc finalement :

$$a^3 < b^3 \leq 0$$

C'est-à-dire :

$$f(a) < f(b) \leq 0$$

Conclusion : si deux nombres sont de même signe, la fonction cube préserve leur ordre strict.

• **Lorsque les deux nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont de signes différents :**

Si deux nombres sont de signes opposés, celui qui est négatif a son image négative, celui qui est positif a une image positive. Dans ce cas encore, la fonction cube préserve leur ordre strict.

2) Tableau de variations

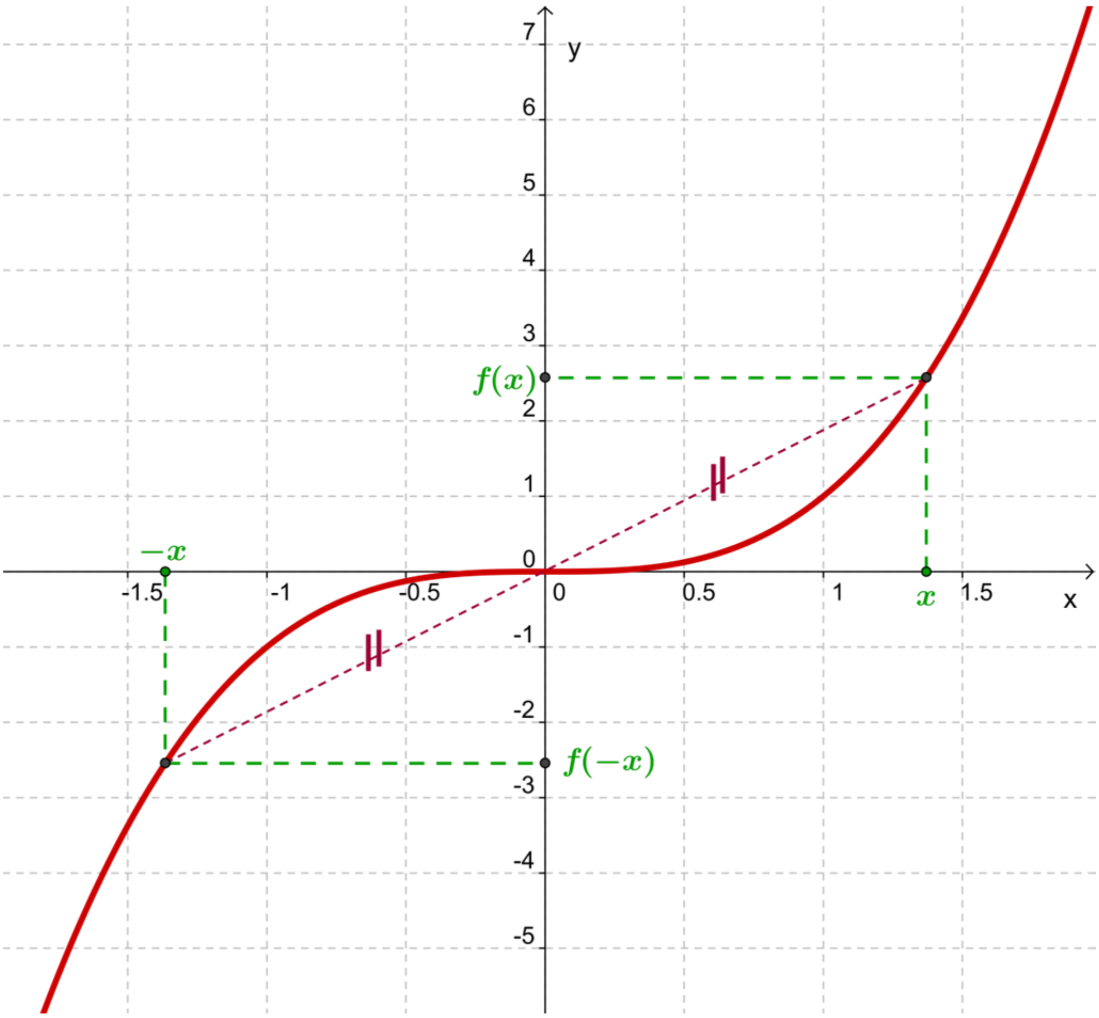
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$		0	

3) Tableau de valeurs

$\boldsymbol{x}$	-100	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10	1 00
$\boldsymbol{f(x)}$	-1 000 000	-1 000	-125	-8	-1	0	1	8	125	1 000	1 000 000

4) Courbe de la fonction cube.

a) Courbe :



On observe sur ce dessin que la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

b) Explications:

- **La fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère:**

Soit x un nombre réel, son opposé $-x$ a pour image :

$$f(-x) = (-x) \times (-x) \times (-x)$$

donc $f(-x) = (-1 \times x) \times (-1 \times x) \times (-1 \times x)$

donc $f(-x) = (-1) \times (-1) \times (-1) \times x \times x \times x$

donc $f(-x) = -1 \times x^3$

enfin $f(-x) = -f(x)$

Conclusion : l'image de l'opposé de x est l'opposé de l'image de x

Graphiquement cela a pour conséquence que la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

• Comportement de la fonction lorsque les valeurs de x sont grandes

1°) Images de nombres entiers naturels.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729

A partir de ces résultats, on peut donner quelques conjectures concernant la fonction cube :

Quand x devient grand, $f(x)$ semble devenir très grand aussi

2°) Images de puissances de 10.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$f(x)$	10^0	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}

On utilise la règle de calcul : $(a^b)^c = a^{b\times c}$

Par exemple, pour $x = 10^4 = 10\,000 = dix\ mille$, on obtient:

$$f(10^4) = (10^4)^3 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000 = mille\ milliards\,!$$

Là encore la conjecture semble aussi se confirmer

3°) Images des nombres négatifs.

Exemple : $f(-2) = (-2) \times (-2) \times (-2) = 4 \times (-2) = -8$

On constate (voir tableau précédent au 1°) que $f(-2)$ est l'opposé de $f(2)$.

Ce fait se généralise à tous les nombres négatifs, en vertu de la remarque suivante :

Soit x un nombre réel, son opposé $-x$ a pour image :

$$f(-x) = (-x) \times (-x) \times (-x)$$

donc $$f(-x) = (-1 \times x) \times (-1 \times x) \times (-1 \times x)$$

donc $$f(-x) = (-1) \times (-1) \times (-1) \times x \times x \times x = -x^3$$

ainsi lorsque x devient très petit $f(x)$ l'est aussi.

IV) Les problèmes que posent la fonction cube.

La fonction cube est présente au programme de la classe de première économique et sociale. A l'instar de la fonction racine carrée, elle présente deux difficultés spécifiques :

• Un problème lié à la recherche d'antécédents ;

• Un problème lié à la notion de nombre dérivé.(Voir les fiches de cours sur la notion de dérivé)

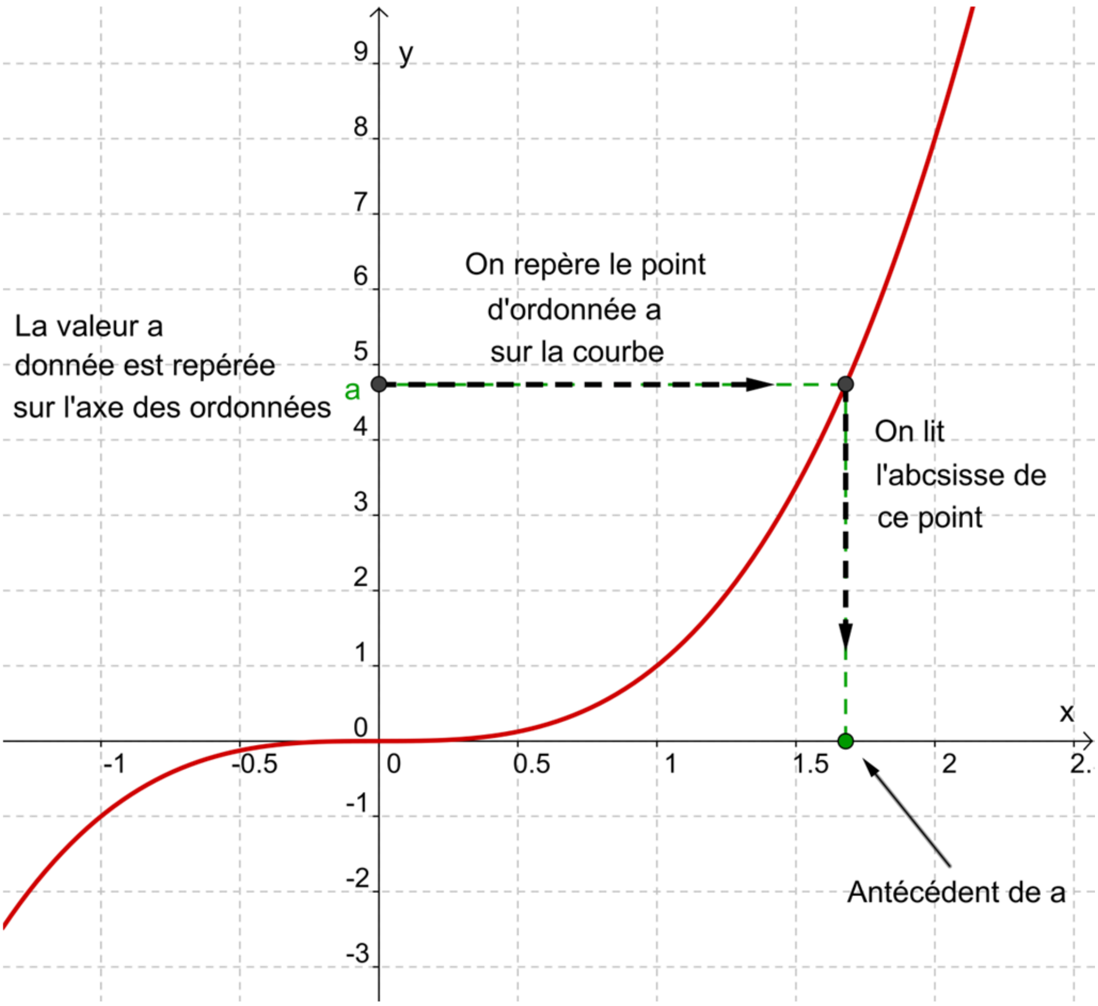
La compréhension de ces problèmes est essentielle pour un élève de première. Ils sont les précurseurs de difficultés rencontrées dans le parcours des années suivantes sur l'étude de fonctions incontournables en mathématiques financières.

Recherche d'antécédents pour la fonction cube.

Soit a un nombre réel donné.

Il relève de la classe de seconde de connaître la définition d'antécédent du nombre a.

On peut se convaincre de l'existence d'un antécédent du nombre a par la fonction cube à l'aide de la représentation graphique de celle-ci :



On constate ici l'existence d'un antécédent de la valeur a représentée.

Théorème :

Soit a un nombre réel et x_a un antécédent de a par la fonction cube.
Alors, quel que soit x un nombre réel, si $x \neq x_a$, alors $f(x) \neq a$.

En d'autres termes, x_a est l'unique antécédent de a.

Preuve. Soit x un nombre réel. Si $x \neq x_a$, alors $x < x_a$ ou $x > x_a$.

Comme la fonction cube est strictement croissante, $f(x) < f(x_a)$ ou, respectivement, $f(x) > f(x_a)$. Donc $f(x) \neq f(x_a)$, donc $f(x) \neq a$.

Notation. L'unique antécédent de a par la fonction cube est noté $\sqrt[3]{a}$.
Attention ! Ce nombre est du même signe que a.

Exemples : comme $f(3) = 27$, on peut affirmer que 27 admet 3 comme antécédent par f. En vertu du théorème précédent, c'est le seul.

On pourra donc noter : $\sqrt[3]{27} = 3$.

Comme $f(-2) = -8$, on peut affirmer que -8 admet -2 comme antécédent par la fonction cube. En vertu du théorème précédent, c'est le seul.