

# Pourcentage d'évolution

## I) Proportion et pourcentage.

### 1) Proportion

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  une partie de l'ensemble  $E$ .

$n_E$  est le nombre d'éléments de  $E$  et  $n_A$  le nombre d'éléments de  $A$ .

La proportion ou la fréquence d'éléments de  $A$  dans  $E$  est :

$$p = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{n_A}{n_E}$$

- $p$  est un nombre compris entre 0 et 1.
- On exprime  $p$  souvent en pourcentage par exemple : si  $p = 0,65$  alors  $p = \frac{65}{100}$  soit 65%
- La relation  $p = \frac{n_A}{n_E}$  permet connaissant deux des trois nombres de calculer le troisième.

**Exemples :**

**Exemple 1 :** Une classe de 30 élèves contient 21 filles. Quelle est la proportion de fille dans cette classe ? Exprimer ensuite ce résultat sous forme de pourcentage.

**Réponse :**

$$n_E = 30 \qquad n_A = 21 \qquad \text{La proportion de filles dans la classe est } \frac{21}{30}$$

$$\frac{21}{30} = 0,7 = \frac{70}{100}$$

**Dans cette classe, 70% des élèves sont des filles.**

**Exemple 2 :** En 2004 , un musée Français a reçu 75 250 visiteurs dont 24 525 étrangers  
Calculer la proportion de visiteurs français en 2004 . Exprimer ensuite ce résultat sous forme de pourcentage ( à 0,1 près )

**Réponse :**

$$n_E = 75\,250 \qquad n_A = 75\,250 - 24\,525 = 50\,725$$

$$p = \frac{50\,725}{75\,250} \approx 0,674 \qquad \text{La proportion de visiteurs Français est d'environ } 0,674$$

$$0,674 = \frac{67,4}{100}$$

**Le pourcentage de visiteurs Français est d'environ 67,4% à 0,1 près.**

**Exemple 3:**

En 2010, La France comptait environ 2,7 millions de chômeurs. Le pourcentage du nombre de chômeurs représente environ 9,5% de la population active. Quel est le nombre de personnes composant la population active en 2010 ?

**Réponse :**

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \frac{9,5}{100} = \frac{2,7}{n_E} \quad \text{Donc } n_E = \frac{2,7 \times 100}{9,5} \approx 28,4$$

**La population active est estimée en 2010 à 28,4 millions de personnes .**

**Exemple 4:** Dans un groupe, la proportion de filles est de deux tiers et il y a 16 garçons. Combien y a-t-il de filles ?

**Réponse :**

Si la proportion de filles est de deux tiers alors la proportion des garçons est d'un tiers.

Dans ce cas  $p = \frac{1}{3}$  (la proportion de garçons sur le nombre total)

$n_A = 16$ .  $n_A$  est le nombre de garçons et  $n_E$  est le nombre de personnes faisant parti du groupe

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \frac{1}{3} = \frac{16}{n_E} \quad n_E = 3 \times 16 = 48.$$

$$\frac{2}{3} \times 48 = 32.$$

**Ce groupe est composé de 32 filles.**

**Exemple 5:**

Dans un petit port, les  $\frac{5}{6}$  des 720 habitants vivent de la pêche .Combien d'habitants vivent de la pêche ?

**Réponse :**

Dans ce cas  $p = \frac{5}{6}$   $n_E = 720$ .  $n_A$  est le nombre de personnes vivant de la pêche

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \frac{5}{6} = \frac{n_A}{720} \quad n_A = \frac{720 \times 5}{6} = 600$$

**600 habitants vivent de la pêche.**

**Remarque :** Nous sommes dans une situation de proportionnalité, que l'on peut représenter dans un tableau :

<b>t</b>	<b>Nombre d'éléments de A</b>
<b>100</b>	<b>Nombre d'éléments de E</b>

En reprenant l'exemple1 on a :

$$t = \frac{21 \times 100}{30} = 0,7 = \frac{70}{100}. \text{ On retrouve notre résultat précédent :}$$

70% des élèves de la classe sont des filles

t	21
100	30

## 2) Pourcentage

**Calculer  $t\%$  d'un nombre N c'est multiplier N par  $\frac{t}{100}$**

**Exemple :**

Dans une classe de 30 élèves 70% sont demi-pensionnaires.

Quel est le nombre d'élèves demi-pensionnaires.

**Réponse :**  $30 \times \frac{70}{100} = 21.$

**21 élèves sont demi-pensionnaires.**

## II) Pourcentage d'évolution

### 1) Taux d'évolution à partir d'un pourcentage. Coefficient multiplicateur.

**Pour augmenter une valeur de  $t\%$  il faut la multiplier par  $1 + \frac{t}{100}$**

**Pour diminuer une valeur de  $t\%$  il faut la multiplier par  $1 - \frac{t}{100}$**

**$t$  est le taux d'évolution.**

**Les nombres  $1 + \frac{t}{100}$  et  $1 - \frac{t}{100}$  sont appelés coefficients multiplicateurs.**

**Remarque : Si le coefficient multiplicateur est supérieur à 1 il s'agit d'une hausse ,s'il est inférieur à 1 il s'agit d'une baisse.**

### Exemples :

**1.** Un article coûtait 25 € en 2005 , il subit une augmentation de 12 % , quel est son prix après l'augmentation ?

**2.** Un article coûtait 35€ en 2010. L'année suivante son prix diminue de 8%. Quel est son prix après cette réduction ?

**3 :** La population d'un village est passée de 4512 habitants en 2005 à 6768 habitants en 2006. Quel est le coefficient multiplicateur ? Quel est le taux d'évolution ?

**4 :** Le nombre d'accident de la route a baissé d'environ 13 % entre 2005 et 2006. On compte néanmoins 145 670 accidents en 2006. Combien d'accidents pouvait-on compter en 2005 ?

**5 :** Compléter le tableau suivant :

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
Augmentation de 27 %	
Diminution de 14,7 %	
	1, 73
	0, 38
	3,5

### Réponses :

**1.** Un article coûtait 25 € en 2005 , il subit une augmentation de 12 % :

$$25 \times \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 28. \quad \text{Son prix après l'augmentation est de 28 €}$$

**2.** Un article coûtait 35€ , il diminue de 8% :

$$35 \times \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 32,2. \quad \text{Son prix après la réduction est de 32,20 €}$$

$$\mathbf{3 :} \quad 4512 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 6\,768$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{6\,768}{4512} = 1,5. \quad \text{Le coefficient multiplicateur est 1,5}$$

$$1 + \frac{t}{100} = 1,5 \quad t = 50 \quad \text{Le taux d'évolution est de 50\%}.$$

$$\mathbf{4 .} \quad 145\,670 \div \left(1 - \frac{13}{100}\right) \approx 167\,436$$

Il y avait environ 167 436 accidents de la route en 2005.

5 .

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
Augmentation de 27 %	1,27
Diminution de 14,7 %	0,853
<b>Augmentation de 73%</b>	1,73
<b>Diminution de 62%</b>	0,38
<b>Augmentation de 250 %</b>	3,5

$$\text{Augmentation de 27 \% : } 1 + \frac{27}{100} = 1,27$$

$$\text{Diminution de 14,7 \% : } 1 - \frac{14,7}{100} = 0,853$$

$$1,73 \text{ est supérieur à } 1, \text{ il s'agit d'une hausse : } 1,73 - 1 = 0,73 = \frac{73}{100} = 73\%$$

$$0,38 \text{ est inférieur } 1, \text{ il s'agit d'une baisse : } 1 - 0,38 = 0,62 = \frac{62}{100} = 62\%$$

$$3,5 \text{ est supérieur à } 1, \text{ il s'agit d'une hausse : } 3,5 - 1 = 2,5 = \frac{250}{100} = 250 \%$$

## 2) Taux d'évolution en pourcentage à partir d'une évolution

**Une grandeur évolue d'une valeur initiale  $V_i$  à une valeur finale  $V_f$ .**

**Le taux d'évolution de cette grandeur est égal à :**

$$\frac{V_f - V_i}{V_i}$$

**En pourcentage le taux d'évolution est  $t$  % avec  $t = 100 \times \frac{V_f - V_i}{V_i}$**

**Remarque : Si  $t$  , le taux d'évolution d'une grandeur est supérieur à 0 alors la grandeur est en hausse , s'il est inférieur à 0 alors cette grandeur est en baisse.**

**Exemples :**

**1.** Le salaire d'un employé est augmenté en passant de 1540 € à 1848 €  
Quel est le taux d'évolution de ce salaire ?

**2.** Le stock d'une entreprise subit une baisse de 200 kg à 140 kg.

Quel est le pourcentage de baisse du stock de cette entreprise ?

**3.** En quinze ans, un article a vu son prix tripler. Quel est le pourcentage d'augmentation de cet article ?

## Réponses :

1. Le salaire initial est 1540 € donc  $V_i = 1540$  et  $V_f = 1848$

$$t = 100 \times \frac{1848 - 1540}{1540} = 20.$$

**Le taux d'évolution de ce salaire est de 20%**

2. Le stock d'une entreprise subit une baisse de 200 kg à 140 kg. donc  $V_i = 200$  et  $V_f = 140$

$$t = 100 \times \frac{140 - 200}{200} = 100 \times \frac{-60}{200} = -30$$

**Le stock a baissé de 30 %**

3. En quinze ans, un article a vu son prix tripler.

$$V_f = 3 \times V_i \text{ donc : } t = 100 \times \frac{3V_i - V_i}{V_i} = 100 \times \frac{2V_i}{V_i} = 200$$

**L'article a subi une augmentation de 200%.**

## III) Evolutions successives

### Propriété :

**Lors de plusieurs évolutions successives les coefficients multiplicateurs se multiplient.**

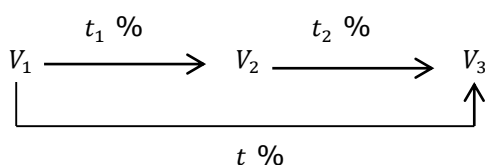
**On obtient alors le coefficient multiplicateur C et le taux d'évolution t équivalent ou global.**

**Le coefficient multiplicateur C correspond à un taux d'évolution t :**

**a) Si  $C > 1$  : C'est une augmentation de t % avec  $t = (C - 1) \times 100$**

**b) Si  $C < 1$  : C'est une diminution de t % avec  $t = (1 - C) \times 100$**

**Démonstration :** Si une grandeur évolue d'une valeur initiale  $V_1$  à une valeur  $V_2$  dont le taux d'évolution est  $t_1$ , puis d'une valeur  $V_2$  à  $V_3$ . dont le taux d'évolution est  $t_2$  ( $t_1$  et  $t_2$  peuvent être positifs, dans le cas d'une augmentation, ou négatifs dans le cas d'une diminution)



$$\left. \begin{array}{l} V_2 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) V_1 \\ V_3 = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) V_2 \end{array} \right\} V_3 = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) V_1$$

## Exemples :

### Exemple 1 :

Une action cotée en bourse augmente successivement deux jours consécutifs : le premier jour de 5% et le deuxième de 8%. Quel est le coefficient multiplicateur ? Quel est le pourcentage d'augmentation globale en deux jours ?

#### Réponse :

$$V_3 = V_1 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \left(1 + \frac{8}{100}\right) = V_1 \times 1,134$$

**Le coefficient multiplicateur est : C = 1,134.**

$$(1,134 - 1) \times 100 = 13,4$$

**L'évolution globale de cette augmentation est de 13,4%**

### Exemple 2 :

Le prix du baril du pétrole a baissé de 15% puis a augmenté de 9% le mois suivant  
Quel est le coefficient multiplicateur ? Déterminer en pourcentage l'évolution globale du prix du baril durant ces deux derniers mois ?

#### Réponse :

$$V_3 = V_1 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) \times \left(1 + \frac{9}{100}\right) = V_1 \times 0,9265$$

**Le coefficient multiplicateur est : C = 0,9265.**

$$(1 - 0,9265) \times 100 = 7,35$$

**Le prix du baril de pétrole a baissé en deux mois de 7,35%**

## **IV) Evolution réciproque**

### **1) Définition :**

**Une grandeur évolue d'une valeur initiale  $V_i$  à une valeur finale  $V_f$ .  
L'évolution réciproque de cette grandeur est l'évolution de la valeur  $V_f$  à la valeur  $V_i$ .**

**Exemple :** Le prix du baril du pétrole a augmenté de 17 %.

L'évolution réciproque revient à trouver le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer pour que le prix du baril de pétrole retrouve son prix initial.

## 2) Propriété

**Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque d'une grandeur est l'inverse du coefficient multiplicateur de cette grandeur.**

**Si  $t$  est le taux d'évolution de cette grandeur alors le coefficient multiplicateur inverse est :  $\frac{100}{100+t}$**

**Démonstration :** Soit  $t$  le taux d'évolution d'une grandeur ( $t$  peut être positif si c'est une augmentation ou négatif si c'est une réduction).

Soit  $V_i$  la valeur initiale d'une grandeur et  $V_f$  sa valeur finale après une évolution de  $t$  %

On a donc :

$$V_f = V_i \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \text{ on a donc } V_i = \frac{V_f}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{V_f}{\frac{100+t}{100}} = V_f \times \frac{100}{100+t}$$

On obtient donc :

$$V_i = V_f \times \frac{100}{100+t} \quad \text{Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est donc } \frac{100}{100+t}$$

**Exemple :** Le prix du baril du pétrole a augmenté de 17 %.

Quel est le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer pour que le prix du baril du pétrole retrouve son prix initial ?

**Réponse :**

Il s'agit de calculer le taux d'évolution réciproque dont le taux est 17 %

$$\text{Le coefficient multiplicateur est : } \frac{100}{100 + 17} \approx 0,8547$$

**Le coefficient multiplicateur est d'environ 0,8547**

$$(1 - 0,8547) \times 100 = 14,53$$

**Pour que le prix du baril du pétrole revienne à son cours initial il faudrait qu'il subisse une baisse d'environ 14,53 %**



## V) Evolutions et indices

Exemple : Prenons l'évolution du SMIC **horaire brut** de 2000 à 2010:

Année	2000	2005	2010	2012
SMIC horaire en euros	6,41	8,03	8,86	9,40
indice				

Ce tableau permet de voir les variations en données absolues du SMIC mais ne permet pas de connaître rapidement les variations relatives, c'est-à-dire les pourcentages d'évolution du SMIC

- **Pour cela on choisit une année de référence**, (dans notre cas , l'année 2000) **on lui affecte l'indice 100**

Année	2000	2005	2010	2012
SMIC horaire en euros	6,41	8,03	8,86	9,40
indice	<b>100</b>			

- **Les indices correspondants aux autres années sont ensuite calculés de telle sorte que les proportions soient respectées.**

**Par exemple l'indice correspondant à l'année 2005 sera le nombre  $I_1$  tel que la suite de nombres 100,  $I_1$  soient proportionnelle à la suite 2000 , 2005 .**

$$I_1 = \frac{8,03 \times 100}{6,41} \approx 125 \quad \text{L'indice est un nombre entier.}$$

**On dit que l'on affecte l'indice 125 à l'année 2005 avec base 100 en 2000.**

- En prenant toujours l'année 2000 comme année de référence ( base 100) , le tableau des indices correspondant au SMIC entre 2000 et 2005 est :

Année	2000	2005	2010	2012
SMIC horaire en euros	6,41	8,03	8,86	9,40
indice	<b>100</b>	<b>125</b>	<b>138</b>	<b>147</b>

$$I_1 = \frac{8,03 \times 100}{6,41} \approx 125$$

$$I_2 = \frac{8,86 \times 100}{6,41} \approx 138$$

$$I_3 = \frac{9,4 \times 100}{6,41} \approx 147$$