

Fonction racine carrée

I) Définition

On appelle **fonction racine carrée**, la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; + \infty[$, qui a tout réel x associe \sqrt{x} nombre réel positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$

On notera dans la suite $f(x) = \sqrt{x}$

Exemples :

$$f(4) = 2 ; f(100) = 10 ; f(0) = 0 ; f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$$

II) Etude

1) Variations de f sur $[0 ; + \infty[$

Soient u et v deux réels positifs ou nuls

Comparons $f(u)$ et $f(v)$

On sait que $(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = \sqrt{u}^2 - \sqrt{v}^2 = u - v$ d'après la définition de f


$$\text{Donc } f(u) - f(v) = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$$

d'où $f(u) - f(v)$ possède le même signe que $u - v$ (car $\sqrt{u} + \sqrt{v} \geq 0$ par définition)

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; + \infty[$.

2) Tableau de variations et courbe :

a) Tableau de variations :

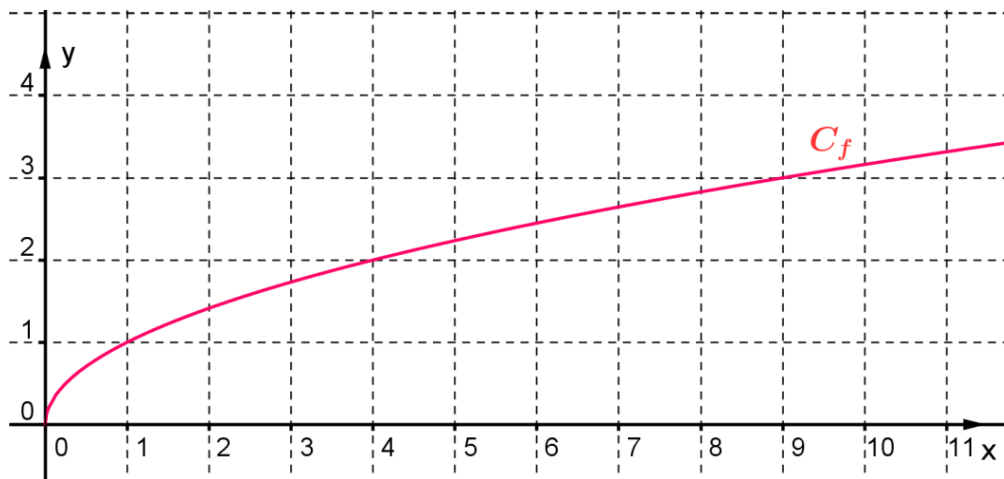
x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	

b) Tableau de valeurs

x	0	1	4	9	36	100	10 000	1 000 000	10 000 000 000
$f(x)$	0	1	2	3	6	10	100	1 000	100 000

Lorsque x devient très grand $f(x)$ le devient aussi

c) Courbe



III) Compléments

1) Equations et inéquations:

a) Equation $\sqrt{x} = k$ avec x positif ou nul

D'après la définition de la fonction racine carrée, on a :

- Si $k \geq 0$ $\sqrt{x} = k$ possède une solution $x = k^2$
- Si $k < 0$ $\sqrt{x} = k$ ne possède aucune solution.

Exemples :

1°) Résoudre l'équation $\sqrt{x} = 5$ Solution $x = 25$

2°) Résoudre l'équation $\sqrt{x} = -3$ L'équation n'a aucune solution

b) Equation $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ avec x et y positifs ou nuls

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ avec x et y positifs ou nuls est équivalente à l'équation $x = y$

Exemples :

1°) Résoudre l'équation $\sqrt{x} = \sqrt{2}$.

La solution de cette équation est $x = 2$

2°) Résoudre l'équation $\sqrt{3x-4} = \sqrt{x}$.

On ne peut résoudre cette équation que si $3x - 4 \geq 0$ **et** $x \geq 0$ soit $x \geq \frac{4}{3}$

Si $x \geq \frac{4}{3}$ alors l'équation est équivalente à $3x - 4 = x$ $2x = 4$

soit $x = 2$. **L'équation admet donc une solution $x = 2$ car $2 \geq \frac{4}{3}$.**

3°) Résoudre l'équation $\sqrt{2x-8} = \sqrt{2-x}$.

On ne peut résoudre cette équation que si : $2x - 8 \geq 0$ **et** $2 - x \geq 0$ c'est-à-dire:

$x \geq 4$ **et** $x \leq 2$ **ce qui est impossible donc $S = \emptyset$.**

4°) Résoudre l'équation $\sqrt{5x+10} = \sqrt{20x+50}$.

On ne peut résoudre cette équation que si $5x + 10 \geq 0$ et $20x + 50 \geq 0$

$x \geq -2$ **et** $x \geq \frac{-5}{2}$

soit $x \in [-2 ; +\infty[$ alors l'équation est équivalente à $5x + 10 = 20x + 50$

soit $-15x = 40$ soit $x = -\frac{40}{15}$

Mais $-\frac{40}{15} \notin [-2 ; +\infty[$ donc **l'équation n'a aucune solution.**

5°) Résoudre l'équation $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{x+1}$

. On ne peut résoudre cette équation que si $4 - x^2 \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$

soit $x \in [-1 ; 2]$ alors l'équation est équivalente à $4 - x^2 = x + 1$

C'est-à-dire : $-x^2 - x + 3 = 0$

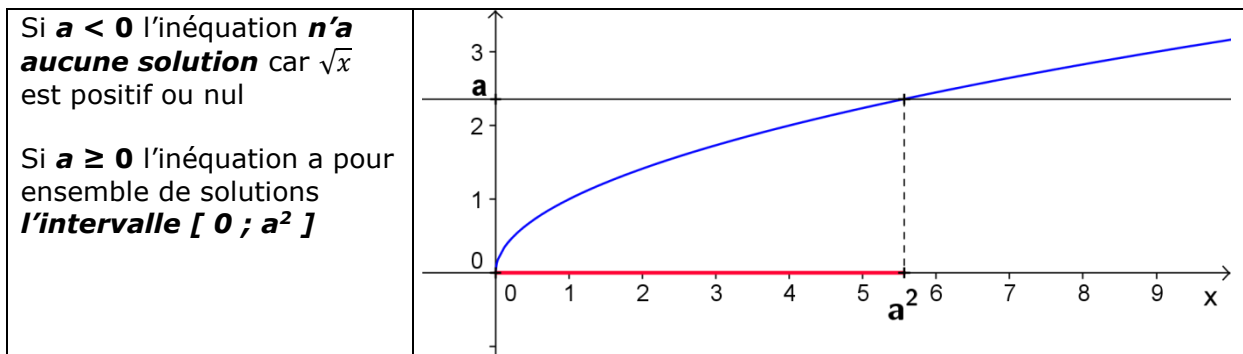
$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 3 = 13$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{-2} < -2$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{-2}$ $1 < x_2 < 2$ donc l'équation a une solution $\frac{1-\sqrt{13}}{-2}$

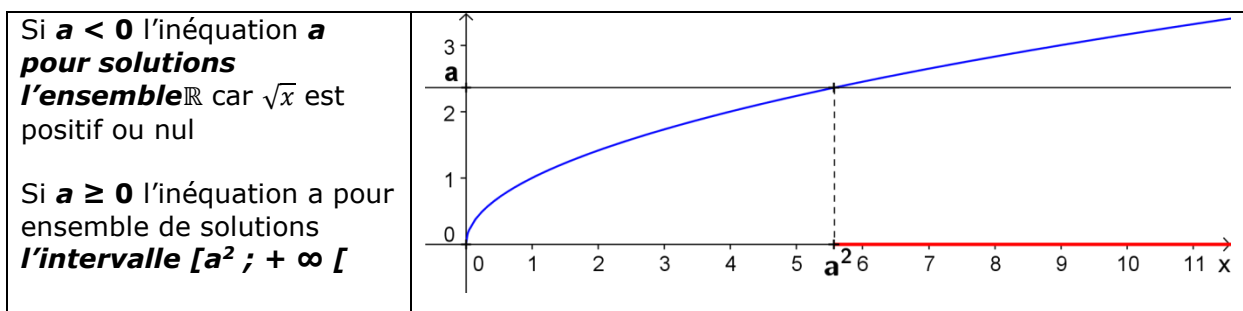
L'interprétation géométrique de cette équation est l'intersection d'un demi-cercle avec une demi-parabole

c) Inéquation $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ avec x et y positifs ou nuls

• Inéquation $\sqrt{x} \leq a$



• Inéquation $\sqrt{x} \geq a$



Exemples :

- | | |
|---|--|
| 1°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leq 3$ | L'ensemble des solutions: $x \in [0 ; 9]$ |
| 2°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq -2$ | L'ensemble des solutions : \mathbb{R} |
| 3°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leq -1$ | L'ensemble des solutions: \emptyset |
| 4°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq \frac{3}{5}$ | L'ensemble des solutions: $[\frac{9}{25} ; +\infty[$ |

Autre exemple : Résoudre l'inéquation $\sqrt{2-x} \geq \sqrt{x+3}$

On ne peut résoudre cette équation que si $2-x \geq 0$ et $x+3 \geq 0$

soit $x \in [-3; 2]$ alors l'inéquation est équivalente à $2-x \geq x+3$

soit $2x \leq -1$ C'est-à-dire : $x \leq -\frac{1}{2}$

Donc $x \in [-3; -\frac{1}{2}]$ L'ensemble des solutions est donc : $[-3; -\frac{1}{2}]$

