Sens de variation d'une suite numérique

I) Définitions :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$, une suite numérique. On dit que cette suite est :

- **croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$;**
- **strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$;**
- **décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$;**
- **strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.**

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, est monotone si elle est croissante ou décroissante

Remarque : pour connaître le sens de variation d'une suite, on compare donc deux termes consécutifs de la suite. On doit faire cela pour tous les termes de la suite.

II) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Selon l'expression de la suite (u_n) :

- **Méthode 1 : On calculera l'expression $u_{n+1} - u_n$ et on étudiera son signe :**

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite u est croissante

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite u est décroissante

En Effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

- **Méthode 2 : Dans le cas où $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonctions f sur [0 ; +∞ [**

Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur [0 ; + ∞ [
Si la fonction f est croissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est croissante aussi
Si la fonction f est décroissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est décroissante aussi

En effet , pour tout entier naturel n,

$n < +1$, si f est strictement croissante alors $f(n) < f(n+1)$

si f est strictement décroissante alors $f(n) > f(n+1)$

Remarque: On peut aussi, sous certaines conditions, calculer l'expression $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ et on compare cette expression à 1:

Tout d'abord, il faut prouver que tous les termes de la suite u sont positifs

Puis, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

- Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante
- Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est décroissante

En Effet, Si tous les termes de la suite u sont positifs, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

III) Exemples

Exemple 1: On définit la suite $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ par : $u_n = 3n + 1$ on a donc :

$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2: On définit la suite $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et $u_0 = 2$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times u_n}{u_n} = 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1}$,

Comme tous les u_n sont positifs car $u_0 = 2$ on a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 3: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $u_n = f(n)$.Pour tout entier naturel $\mathbb{N}$ non nul ,

f est strictement décroissante sur]0 ; +∞ [, comme $n < n + 1$ alors pour tout

$n > 0$, $f(n) > f(n+1)$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 4: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = n^2 - 1$

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n - n^2 + 1 = 2n + 1$

Pour $n \geq 0$ $2n + 1 > 0$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 5: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x + 4$

avec $u_0 = 2$

$u_1 = u_0 + 4 = 2 + 4 = 6$

$u_2 = u_1 + 4 = 6 + 4 = 10$

$u_3 = u_2 + 4 = 10 + 4 = 14$

$u_{n+1} - u_n = u_n + 4 - u_n = 4 > 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante

Exemple 6

a) Considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_n = f(n)$.

Pour n entier naturel, formons la différence

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (n^2 - 3n + 1) = 2n - 2$ qui est strictement positif **dès que $n \neq 0$ ou $n \neq 1$. Donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.**

L'étude des premiers termes faite ci-dessus montre que $(u_n)_{n\geq 1}$ **est croissante non strictement et que $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas monotone mais l'est pour $(u_n)_{n\geq 2}$.**

b) Considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour n entier naturel, formons la différence

$u_{n+1} - u_n = u_n{}^2 - 3u_n + 1 - u_n = u_n{}^2 - 4u_n + 1 = (u_n - 2)^2 - 3$

$= (u_n - 2 + \sqrt{3})(u_n - 2 - \sqrt{3})$

Donc $u_{n+1} - u_n$ est positif pour des valeurs de u_n inférieures à $2 - \sqrt{3}$ ou supérieures à $2 + \sqrt{3}$.

Nous avons vu que $u_2 = 5 > 2 + \sqrt{3}$. D'après le calcul précédent, nous savons que $u_3 - u_2$ est strictement positif, donc u_3 est plus grand que u_2 , donc que 5. Donc u_4 est plus grand que u_3 ... et ainsi de suite. **Donc la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.**

On ne peut pas en dire autant de $(u_n)_{n\geq 0}$. En effet, on constate que les premiers termes sont 1 puis -1 . Cette suite est donc d'abord décroissante, puis croissante. On ne peut pas affirmer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante mais $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas monotone.