

Répétition d'expériences identiques et indépendantes

I) Situation étudiée

On considère une expérience aléatoire possédant un ensemble fini Ω d'issues. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de telle façon que les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre (indépendance)

Exemples

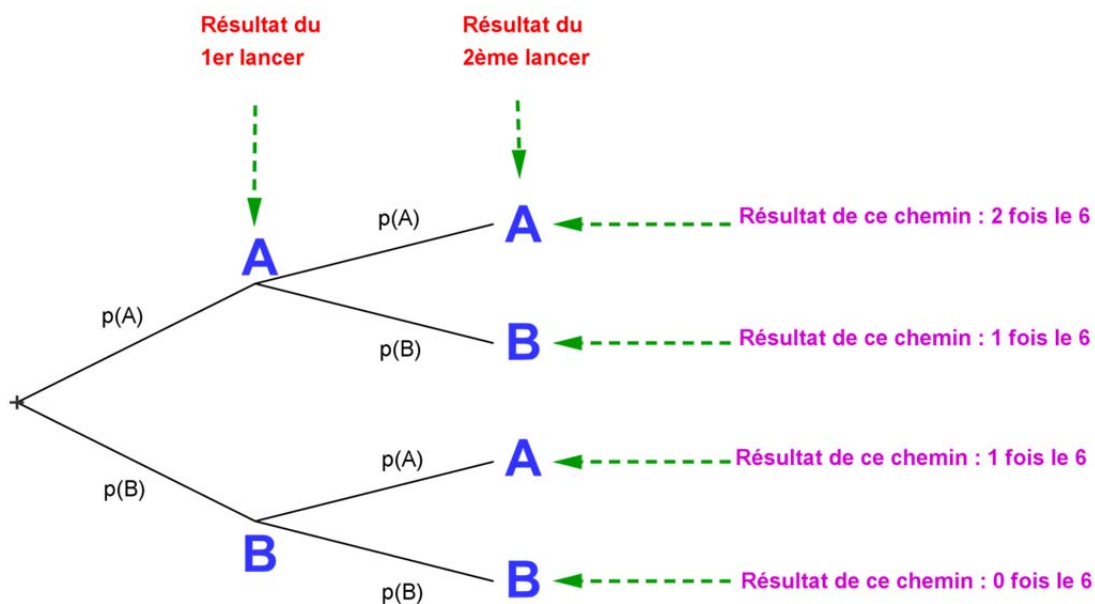
- 1) On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.
- 2) On lance une pièce de monnaie équilibrée 3 fois et on s'intéresse au nombre de fois où la pièce retombe sur pile.
- 3) On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1, qu'elle atteigne le 5 est 0,4 et qu'elle atteigne le 1 est 0,5.
- 4) On s'intéresse aux familles ayant deux enfants.

II) Représentation

Pour représenter une telle répétition d'expériences on construit un arbre pondéré. Sur chaque branche on indique la probabilité de l'issue correspondante.

Exemple :

Soit une expérience aléatoire possédant $\Omega = \{ A ; B \}$ comme ensemble d'issues. On répète deux fois cette expérience. On obtient ainsi l'arbre suivant :



III) Modélisation

Dans le cas d'une répétition d'expériences aléatoires **identiques et indépendantes** représentée par un arbre pondéré.

- La probabilité d'un événement correspondant à **un chemin** sur l'arbre est obtenue en **multipliant les probabilités portées sur les branches de ce chemin**
- La probabilité d'un événement correspondant à **plusieurs chemins** est obtenue en **ajoutant les probabilités des événements correspondants à chaque chemin** puisque ceux-ci sont incompatibles.

Exemples :

Sur l'exemple précédent :

- Probabilité de l'événement « AA » : $p(A) \times p(A)$
- Probabilité de l'événement « BA » : $p(B) \times p(A)$
- Probabilité de l'événement « les deux issues sont différentes » (soit AB ou BA) : $p(A) \times p(B) + p(B) \times p(A)$
- Probabilité de l'événement « les deux issues sont identiques » (soit AA ou BB) : $p(A) \times p(A) + p(B) \times p(B)$

IV) Exemples

Reprenons les exemples du début de la fiche

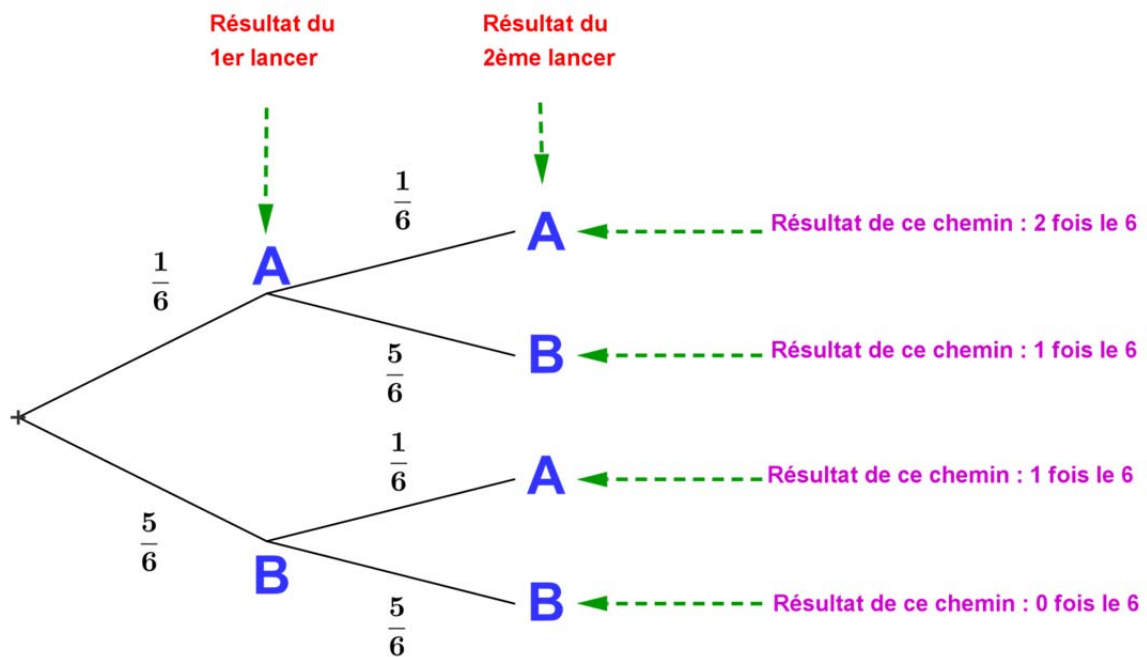
1) Deux lancers de dé

On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.

Appelons A l'issue « on a obtenu un 6 » $p(A) = \frac{1}{6}$ et $B = \bar{A}$ « on n'a pas obtenu un 6 »

On a $p(B) = \frac{5}{6}$

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Ainsi la loi de probabilité correspondant au nombre de 6 obtenus est :

$$P(\text{ On a obtenu 2 fois le 6 }) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{ On a obtenu 1 fois le 6 }) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$$

$$P(\text{ On a obtenu 0 fois le 6 }) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

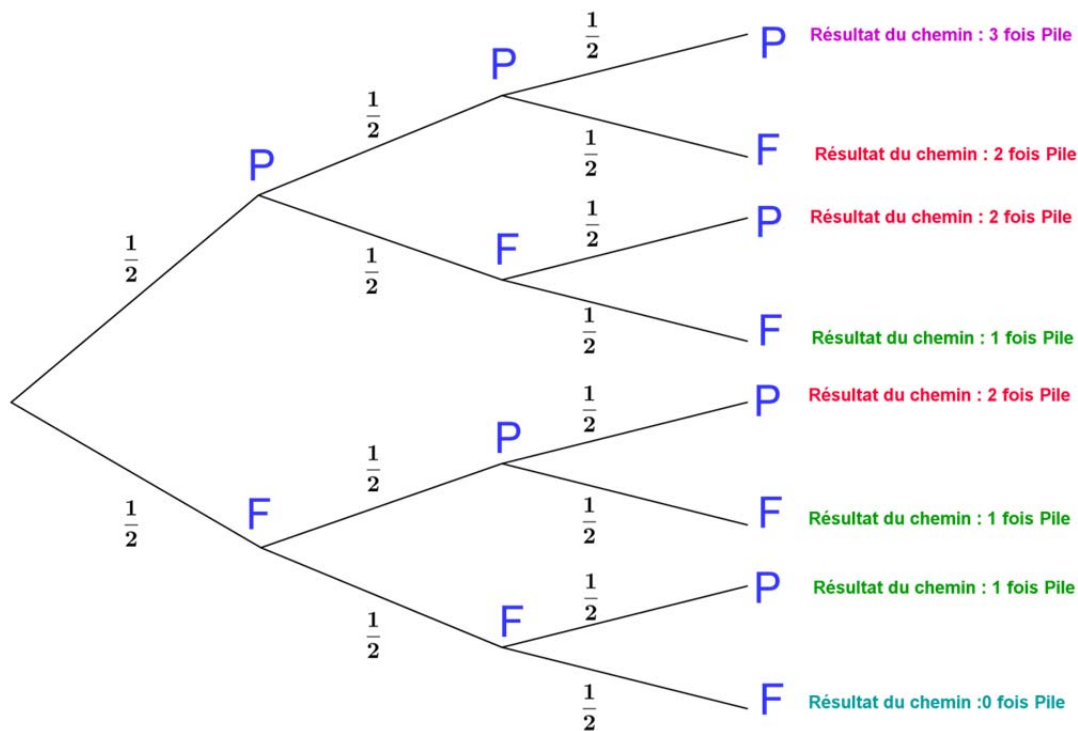
2) Trois lancers de pièces

On lance une pièce de monnaie équilibrée 3 fois et on s'intéresse au nombre de fois où la pièce retombe sur pile.

Appelons P l'événement la pièce retombe sur Pile et F la pièce retombe sur Face. On a

$$P(P) = P(F) = \frac{1}{2}$$

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Ainsi la loi de probabilité correspondant au nombre de fois où on a obtenu PILE est :

$$P(\text{On a obtenu 3 fois PILE}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{On a obtenu 2 fois PILE}) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{On a obtenu 1 fois PILE}) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{On a obtenu 0 fois PILE}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

3) Deux lancers de flèches

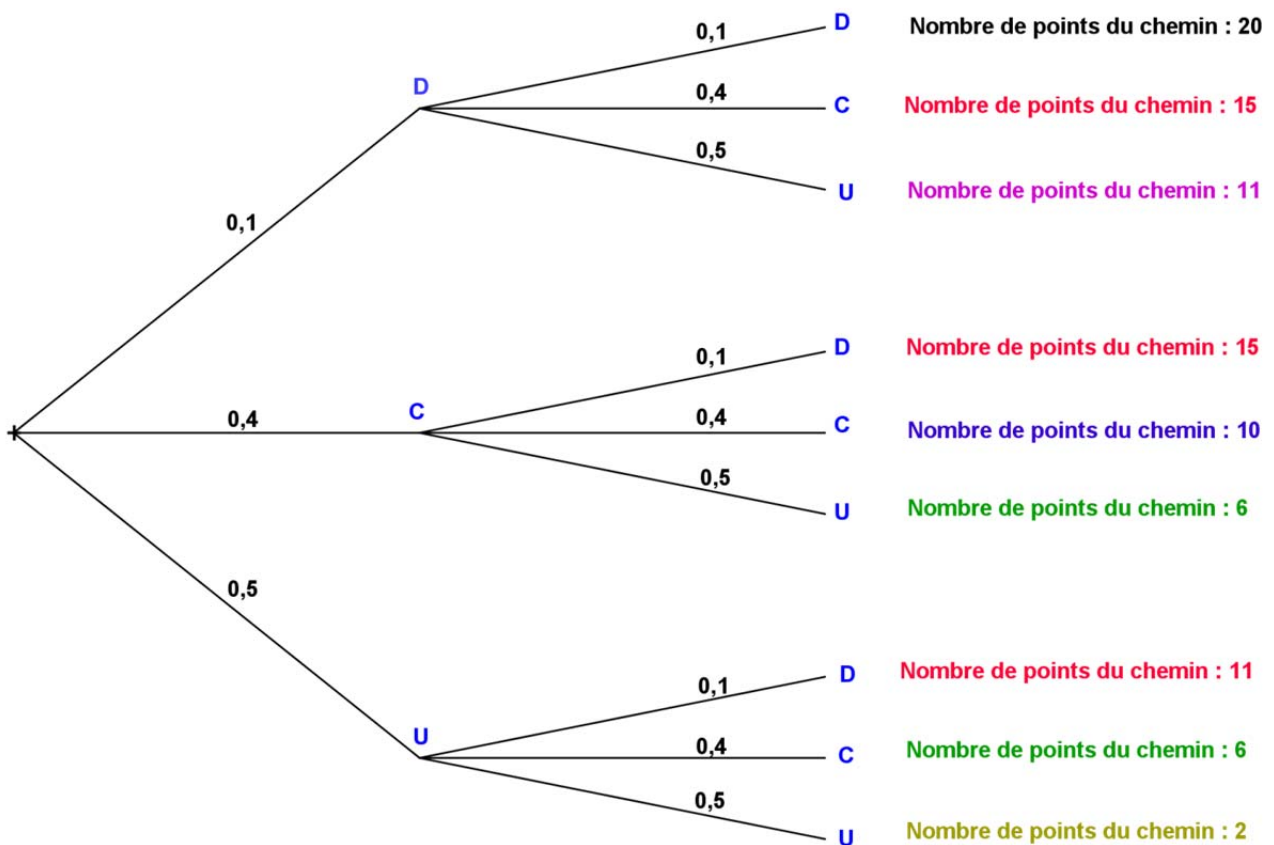
On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1 , qu'elle atteigne le 5 est 0,4 et qu'elle atteigne le 1 est 0,5.

Appelons D l'événement la flèche atteint le 10 : $P(D) = 0,1$

C l'événement la flèche atteint le 5 : $P(C) = 0,4$

U l'événement la flèche atteint le 1: $P(U) = 0,5$

Représentons la situation par un arbre pondéré :



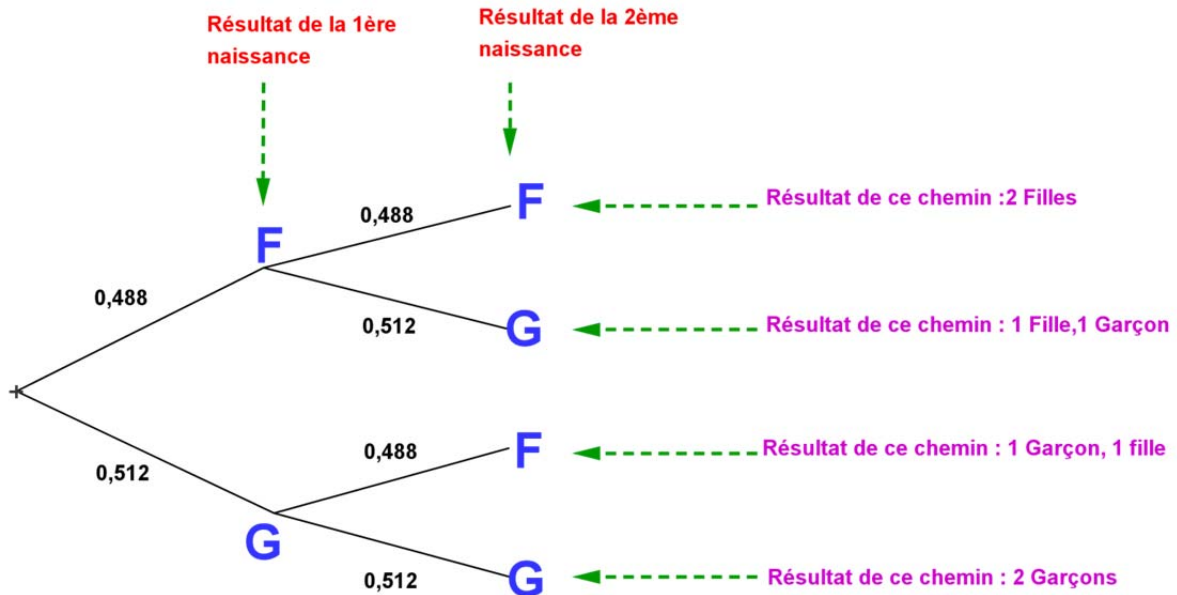
Ainsi on obtient la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de points obtenus :

Nombre de points obtenus x_i	20	15	11	10	6	2
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$	$0,1 \times 0,1$ = 0,01	$2 \times 0,1 \times 0,4$ = 0,08	$2 \times 0,1 \times 0,5$ = 0,1	$0,4 \times 0,4$ = 0,16	$2 \times 0,4 \times 0,5$ = 0,4	$0,5 \times 0,5$ = 0,25

4) Familles de deux enfants

On s'intéresse aux familles ayant 2 enfants. On appelle F l'événement « naissance d'une fille » et G « naissance d'un garçon ». On sait que en France $p(F) \approx 0,488$ et que $p(G) = 1 - P(F) \approx 0,512$

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Ainsi on a :

La probabilité d'avoir 2 Filles : $0,488 \times 0,488 \approx 0,238$

La probabilité d'avoir 2 enfants de sexes différents : $0,48 \times 0,512 + 0,512 \times 0,488 \approx 0,5$

La probabilité d'avoir 2 enfants de même sexe : $0,488 \times 0,488 + 0,512 \times 0,512 \approx 0,5$