

# Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

## I) Epreuve et loi de Bernoulli

### 1) Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre** , toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

- L'une appelée **succès notée  $S$**  dont la probabilité de réalisation est  $p$
- L'autre appelée **échec notée  $E$  ou  $\bar{S}$**  dont la probabilité de réalisation est  $1 - p$

### Exemples

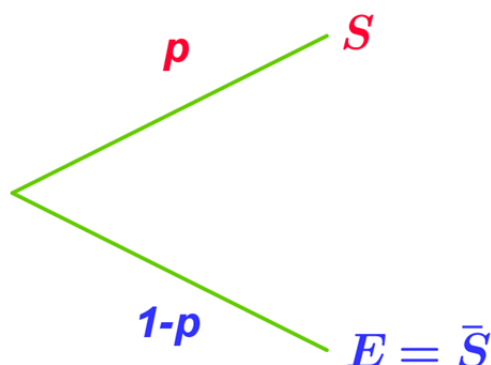
#### Exemples

**1)** Un lancer de pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$  ( le succès  $S$  étant indifféremment « obtenir PILE » ou « obtenir FACE » ).

**2)** Un lancer de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, dans lequel on s'intéresse à l'apparition de  $S$  : « obtenir un 1 » est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{6}$  et la probabilité de  $\bar{S}$  est donc  $1 - p = \frac{5}{6}$

**3)** Extraire une carte d'un jeu de 32 cartes et s'intéresser à l'obtention d'un as est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{8}$  et la probabilité de  $\bar{S}$  est donc  $1 - p = \frac{7}{8}$

### Illustration



**Note historique :** Jacques **Bernoulli** est un mathématicien suisse (1654 – 1705)

## 2) Propriété : loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , si on appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on dit que  $X$  est une **variable de Bernoulli de paramètre  $p$** , elle suit la **loi de Bernoulli de paramètre  $p$**  :

$k$	<b>1</b>	<b>0</b>
$P(X = k)$	$p$	$1 - p$

Son **espérance** est  $E(X) = p$ , sa **variance** est  $V(x) = p(1 - p)$  et son **écart type** est  $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$ .

## II) Schéma de Bernoulli

### 1) Définition 1 : Schéma de Bernoulli

On appelle **schéma de Bernoulli** comportant  $n$  **épreuves** ( $n$  entier naturel non nul) de **paramètre  $p$** , toute expérience consistant à répéter  $n$  fois de façon **indépendantes** une même épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

### Exemples

#### Exemples :

1) 5 lancers successifs d'une pièce bien équilibrée, en appelant succès l'obtention de

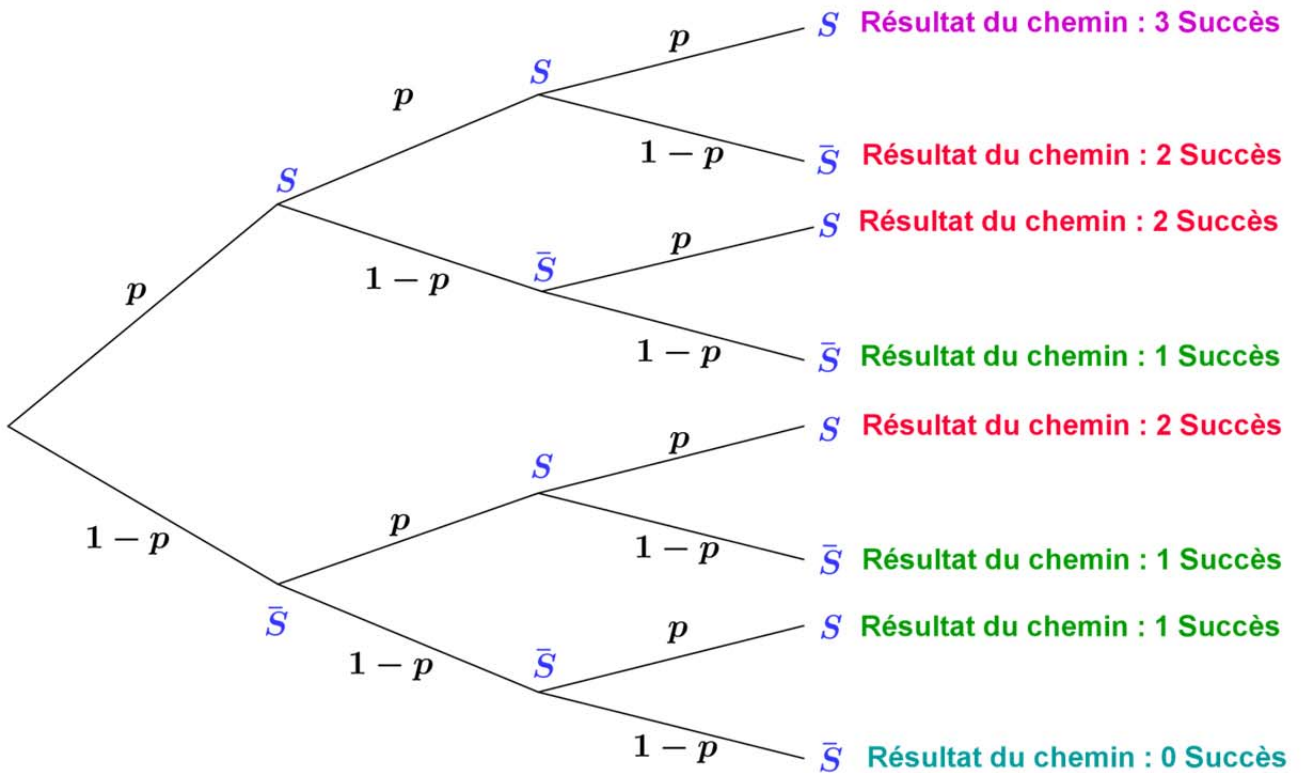
PILE constitue un schéma de Bernoulli avec  $n = 5$  et de paramètre  $p = \frac{1}{2}$

2) 10 lancers de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, en appelant succès l'apparition de  $S$  : « obtenir un 1 » constitue un schéma de Bernoulli avec  $n = 10$  et de paramètre  $p = \frac{1}{6}$

#### Remarques :

- Un schéma de Bernoulli peut être illustré par un arbre (**ci-dessous cas de  $n = 3$** )
- Un résultat est une liste de  $n$  issues  $S$  ou  $\bar{S}$  ( par exemple  $\{S, \bar{S}, \bar{S}, S, \bar{S}\}$  dans un schéma à 5 épreuves )
- Le chemin codé  $S \bar{S} \bar{S} S \bar{S}$  est un chemin qui réalise 2 succès lors de 5 répétitions.

#### Illustration :



## 2) Définition 2

On considère un schéma de Bernoulli de  $n$  épreuves (entier naturel non nul), représenté par un arbre.

Pour tout  $k$  entier naturel  $0 \leq k \leq n$ , On note  $\binom{n}{k}$  le nombre de chemins de l'arbre réalisant  $k$  succès lors des  $n$  répétitions.

Par convention  $\binom{0}{0} = 1$

### Exemples

#### Exemple :

Dans l'arbre représenté ci-dessus on a :  $n = 3$  et

Pour  $k = 0$ , il y a 1 seul chemin réalisant 0 succès donc  $\binom{3}{0} = 1$

Pour  $k = 1$ , il y a 3 chemins réalisant 1 succès donc  $\binom{3}{1} = 3$

Pour  $k = 2$ , il y a 3 chemins réalisant 2 succès donc  $\binom{3}{2} = 3$

Pour  $k = 3$ , il y a 1 seul chemin réalisant 3 succès donc  $\binom{3}{3} = 1$

### III) Propriétés des $\binom{n}{k}$

#### 1) Propriété 1

Pour tout entier naturel  $n, n \geq 0$ ,  $\binom{n}{0} = 1$  et  $\binom{n}{n} = 1$

##### **Justification :**

Dans un arbre, un seul chemin conduit à 0 succès lors de  $n$  répétitions c'est  $\bar{S}\bar{S}\dots\bar{S}$   
donc  $\binom{n}{0} = 1$

Dans un arbre, un seul chemin conduit à  $n$  succès lors de  $n$  répétitions c'est  $SS\dots S$   
donc  $\binom{n}{n} = 1$

#### 2) Propriété 2

Pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n$   $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

##### **Justification :**

Si  $n = 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  donne  $k = 0$ , la propriété est vérifiée grâce à la convention donnée dans la définition plus haut.

Si  $n > 0$ , alors sur l'arbre représentant le schéma de  $n$  épreuves de Bernoulli  $\binom{n}{k}$  est le nombre de chemins réalisant  $k$  succès donc aussi  $n - k$  échecs.

Par ailleurs,  $\binom{n}{n-k}$  est le nombre de chemins réalisant  $n - k$  succès.

Par symétrie de l'arbre, on a donc  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

#### 3) Propriété 3

Pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n - 1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### Justification :

$\binom{n}{k}$  est le nombre de chemins réalisant  $k$  succès dans un schéma de Bernoulli à  $n$  répétitions.

Ces  $k$  succès sont obtenus :

- d'une part en réalisant  $k - 1$  succès lors des  $n - 1$  premières épreuves suivis d'un succès lors de la dernière épreuve ce qui représente  $\binom{n-1}{k-1} \times 1$  chemins dans l'arbre.
- D'autre part en réalisant  $k$  succès lors des  $n - 1$  premières épreuves ce qui représente  $\binom{n-1}{k}$  chemins dans l'arbre.

$$\text{D'où } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### Remarque importante:

Ces trois propriétés permettent de calculer les valeurs de  $\binom{n}{k}$  pour tout entier naturel  $n$   $n \geq 0$  et pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$

### Exemple

Calculer  $\binom{5}{3}$

$$\begin{aligned} \binom{5}{3} &= \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} && \text{propriété 3} \\ &= \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + 1 && \text{propriété 2 et propriété 1} \\ &= 3 \times \binom{3}{2} + 1 = 3 \times \binom{2}{1} + 3 \times \binom{2}{2} + 1 && \text{propriété 3} \\ &= 3 \times \binom{1}{0} + 3 \times \binom{1}{1} + 3 + 1 && \text{propriété 3 et propriété 1} \\ &= 3 + 3 + 3 + 1 = 10 && \text{propriété 1} \end{aligned}$$

**On comprend que ces calculs peuvent devenir fastidieux, c'est pourquoi on se servira du résultat établi par Blaise Pascal dans le triangle suivant :**

## IV) Triangle de Pascal

Ce tableau triangulaire donne la valeur des  $\binom{n}{k}$  pour tout entier naturel  $n$   $n \geq 0$  et pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$  à l'intersection de la ligne portant la valeur de  $n$  et de la colonne portant la valeur de  $k$ .

### Remarque :

Ce tableau peut être poursuivi pour toutes valeurs de  $n$  et de  $k$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Propriété 1

Propriété 3  
 $6 + 4 = 10$

Valeur de  $\binom{6}{4}$

Propriété 1

La propriété 2 est illustrée par la symétrie existant sur chacune des lignes du tableau

## V) Loi binomiale

### 1) Propriété

Dans un schéma de  $n$  épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ , la variable aléatoire  $X$  qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus à pour loi de probabilité :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n$$

On dit que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$

### Justification :

Dans un schéma de  $n$  épreuves de Bernoulli la variable qui compte les succès prend pour valeurs  $0, 1, 2, \dots, n$

Pour un entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ , l'événement  $(X = k)$  est représenté dans l'arbre par les chemins qui comportent  $k$  succès et  $n - k$  échecs, il y en a  $\binom{n}{k}$

Chacun de ces chemins comporte  $k$  fois  $S$  et  $n - k$  fois  $\bar{S}$  et a donc pour probabilité :

$$p^{\text{nombre de } S} \times (1 - p)^{\text{nombre de } \bar{S}}$$

$$\text{Il en résulte que } P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

### Exemples :

**1)** On considère l'expérience suivante : On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 1 apparaît.

- a) Quelle est la loi suivie par la variable  $X$  ?
- b) Quelle est la probabilité de l'événement  $X = 3$  ?
- c) Quelle est la probabilité que la face 1 apparaisse au moins 1 fois ?

### Solution :

a) Les lancers étant identiques et indépendants  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{1}{6}$   $\mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$

b)  $P(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 120 \times \frac{5^7}{6^{10}} \approx 0,155$

c) L'événement « la face 1 apparaît au moins une fois » correspond à l'événement «  $X \geq 1$  » qui a pour événement contraire «  $X = 0$  »

Donc on a  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,838$

**2)** Deux joueurs Alain et Bernard s'affrontent dans un tournoi de tennis. Alain et Bernard jouent 9 matchs. La probabilité qu'Alain gagne un match est 0,6. Le vainqueur est celui qui gagne le plus de matchs. Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de matchs gagnés par Bernard.

- a) Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
- b) Ecrire l'événement « Bernard gagne le tournoi » à l'aide de  $X$  puis calculer sa probabilité.

### Solution :

a) Les matchs étant identiques et leurs résultats indépendants  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 9$  et  $p = 0,4$   $\mathcal{B}(9, 0,4)$

b) Bernard gagne le tournoi si il gagne au moins 5 matchs, donc si l'événement «  $X \geq 5$  » est réalisé

Or  $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

$P(X \geq 5) = \binom{9}{5} 0,4^5 0,6^4 + \binom{9}{6} 0,4^6 0,6^3 + \binom{9}{7} 0,4^7 0,6^2 + \binom{9}{8} 0,4^8 0,6^1 + \binom{9}{9} 0,4^9$

$P(X \geq 5) \approx 0,267$

## 2) Espérance, Ecart type

**L'espérance de la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  est  $E(X) = np$  et son écart type est  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$**

### **Exemples**

**Dans l'exemple 1) précédent**

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} \approx 1,67 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1,18$$

**Dans l'exemple 2) précédent**

$$E(X) = 9 \times 0,4 = 3,6 \quad \sigma(X) = \sqrt{9 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{2,16} \approx 1,47$$