

Extremums d'une fonction

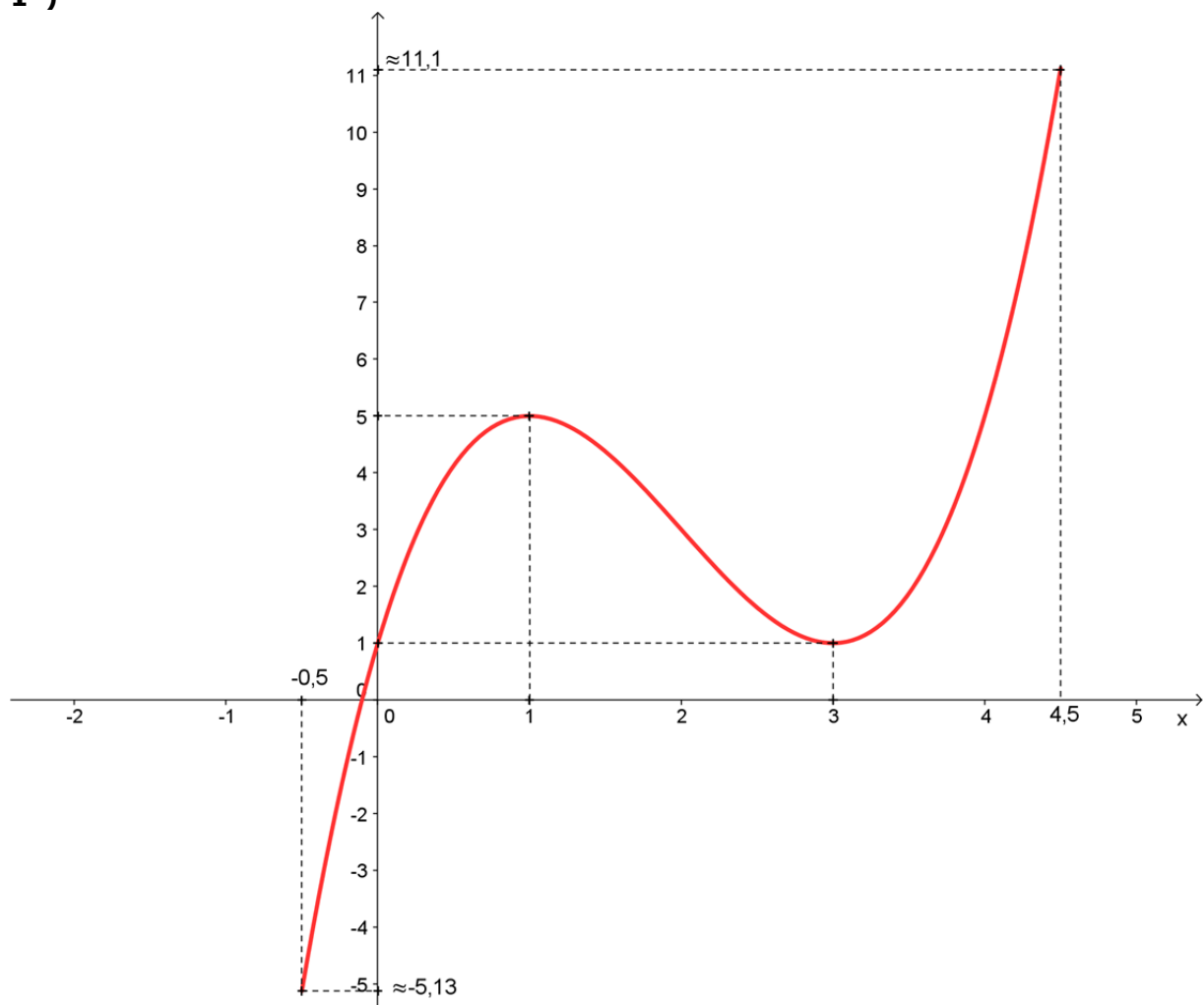
I) Définitions (rappels de seconde : voir la fiche de cours correspondante)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D inclus dans \mathbb{R} , m et M deux réels.

- M est le maximum de f sur D si et seulement si $f(x) \leq M$ pour tout x de D , et s'il existe un réel α dans D tel que $f(\alpha) = M$.
- m est le minimum de f sur D si et seulement si $f(x) \geq m$ pour tout x de D , et s'il existe un réel α dans D tel que $f(\alpha) = m$.
- On appelle **extremum de f sur D** son maximum ou son minimum (s'il existe).
- Si m ou M est un **extremum de f sur un intervalle I ouvert inclus dans D** , on dit que m ou M est un **extremum local de f sur D**

Exemples

1°)

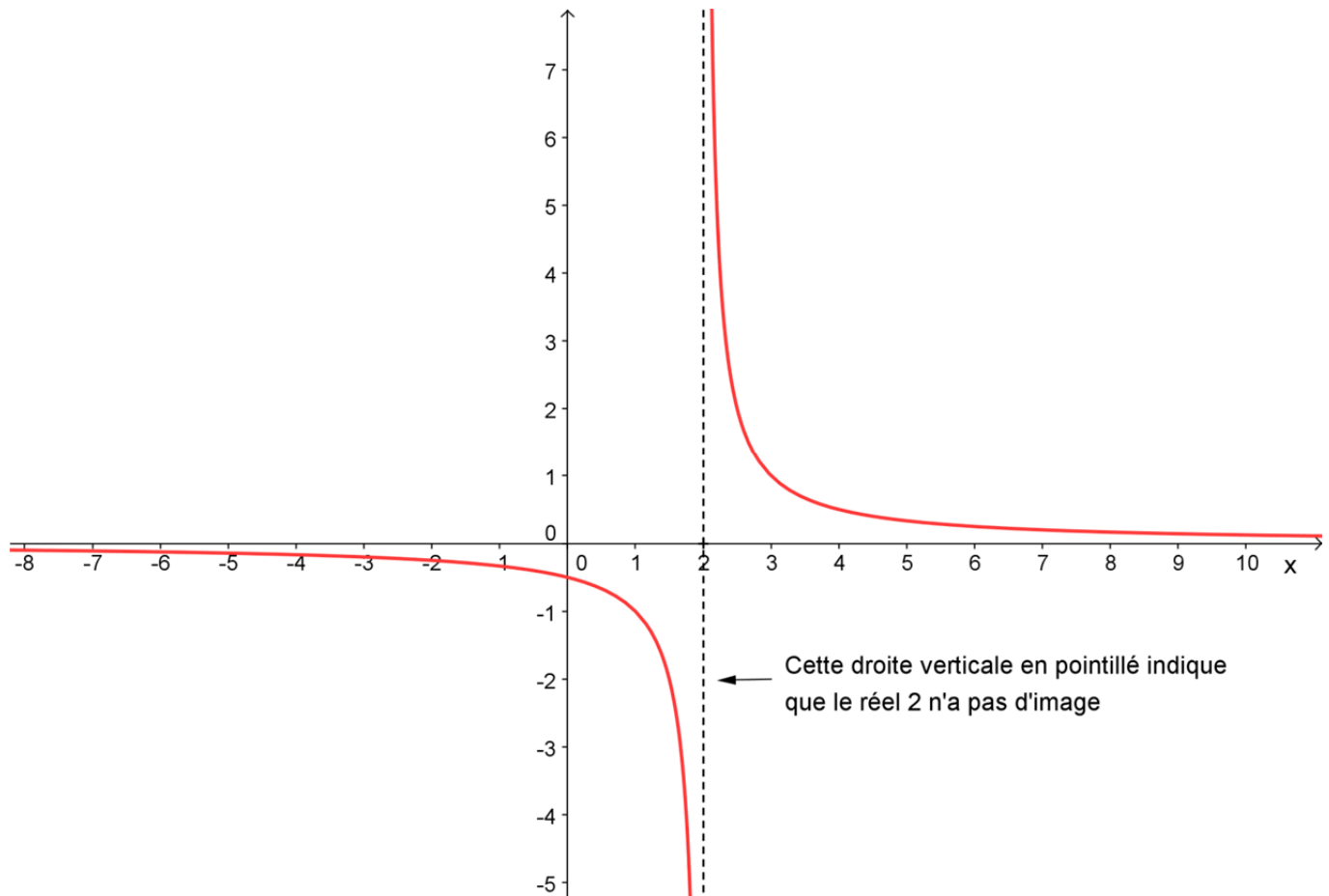


La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $D = [-0,5 ; 4,5]$

Sur D , f admet un minimum $m = f(-0,5) \approx -5,13$ et un maximum $M = f(4,5) \approx 11,1$

Sur $I =] 0 ; 4 [$ intervalle ouvert contenu dans D , f admet un minimum local $a = f(3) = 1$ et un maximum local $A = f(1) = 5$

2°)



La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'ensemble $D =] -\infty ; 2 [\cup] 2 ; +\infty [$

Sur D , f admet ni minimum, ni maximum.

II) Extremums et dérivée

Propriété :

Si une fonction f , dérivable sur un intervalle I , admet un extremum en α sur I et si α n'est pas une borne de I alors $f'(\alpha) = 0$

Démonstration :

Supposons que f admette un maximum en α , α n'étant pas une borne de I .

Il existe un intervalle ouvert J inclus dans I autour de α tel que $f(\alpha)$ soit le maximum de f sur J .

Pour h assez voisin de 0, $\alpha + h \in J$ et donc $f(\alpha + h) \leq f(\alpha)$

Alors pour $h > 0$ $\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \leq 0$ et pour $h < 0$ $\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \geq 0$

La fonction f est dérivable sur I $\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ admet une limite $f'(\alpha)$ quand h tend vers 0 et les rapports $\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ étant aussi bien positifs que négatifs $f'(\alpha)$ ne peut être que 0.

Démonstration analogue pour un minimum.

Attention :

La réciproque de cette propriété est fautive : de $f'(\alpha) = 0$ on ne peut pas déduire que f admet un extremum en α . (Voir exemple ci-dessous)

Exemple :

La fonction $f(x) = x^3$ définie et dérivable sur \mathbb{R} est strictement croissante sur \mathbb{R} et pourtant $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$ sans que la fonction ait d'extremum en ce point.

En revanche :

si f' s'annule en changeant de signe en un réel α , α n'étant pas une borne de I , alors f admet un extremum local en α puisque f' est :

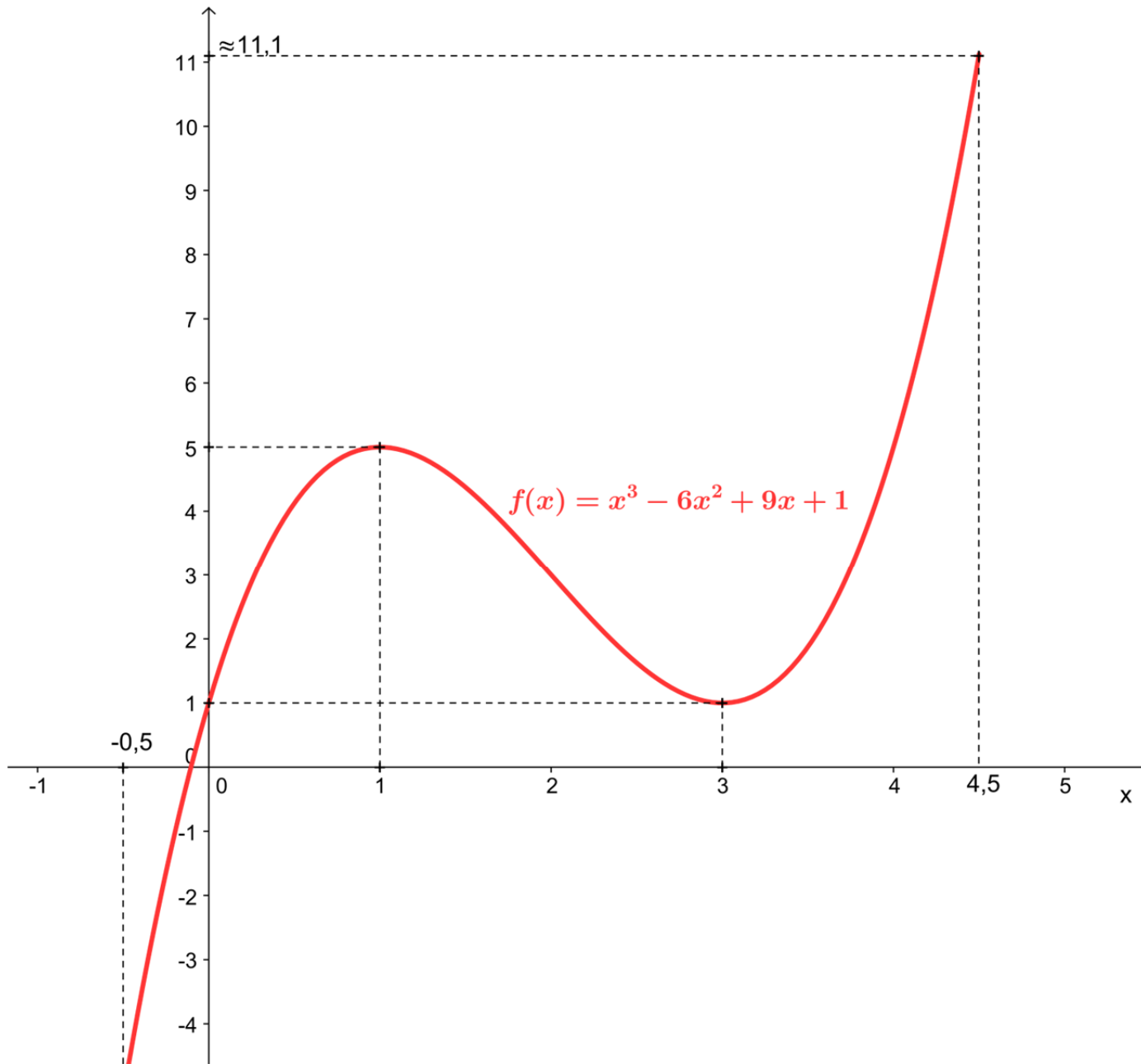
- **Soit croissante avant α et décroissante après (maximum local en α)**
- **Soit décroissante avant α et croissante après (minimum local en α)**

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $I = [-0,5 ; 4,5]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

f est dérivable sur I (fonction polynôme)

dont la représentation graphique est :



Graphiquement on conjecture que f admet un maximum en $x = 1$ et un minimum en $x = 3$ (ces points n'étant pas des bornes de l'intervalle de définition).

Montrons que la dérivée f' s'annule en $x = 1$ et en $x = 3$

On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(1) = 3 - 12 + 9 = 0$ et $f'(3) = 27 - 36 + 9 = 0$

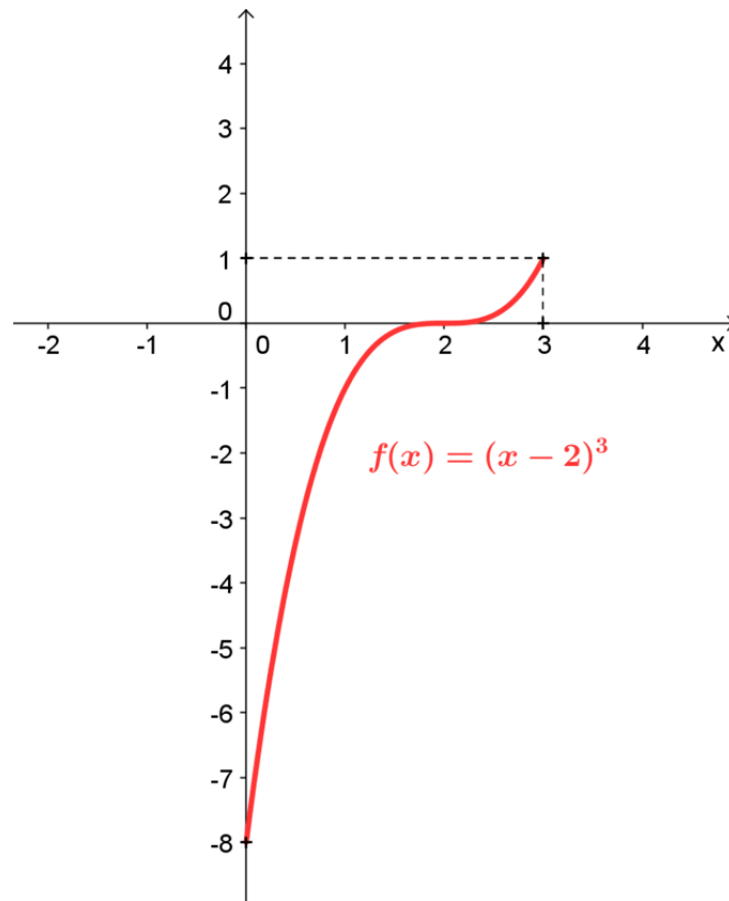
La propriété est bien vérifiée.

2) Exemple montrant la nécessité de l'hypothèse « α n'est pas une borne de l'intervalle I »

Soit la fonction f définie sur $I = [0 ; 3]$ par $f(x) = (x - 2)^3$.

f est dérivable sur I (fonction polynôme)

dont la représentation graphique est :



f admet un minimum en 0 et un maximum en 3 qui sont les bornes d' l'intervalle de définition.

On a $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ donc $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

Donc $f'(0) = 12$ et $f'(3) = 3$ ces deux valeurs ne sont pas nulles.

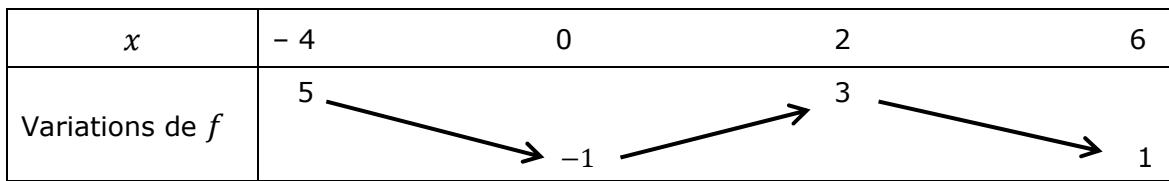
3) Exemple montrant que la réciproque est fautive

En reprenant l'exemple précédent on peut calculer $f'(2) = 3 \times 4 - 12 \times 2 + 12 = 0$ et pourtant $x = 2$ n'est pas un extremum de f

4) En lisant un tableau de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I = [-4 ; 6]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

| | | | | |
|-------------------|----|----|---|---|
| x | -4 | 0 | 2 | 6 |
| Variations de f | 5 | -1 | 3 | 1 |



La lecture de ce tableau nous permet d'affirmer :

- Que f admet sur I un maximum en $x = -4$ et un minimum en $x = 0$
- Que sur $] -1 ; 3 [$ f admet un maximum local en $x = 2$ et un minimum en $x = 0$ et que par conséquent $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$
- En outre on peut affirmer que $f'(x) \geq 0$ sur $[0 ; 2]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[-4 ; 0]$ et sur $[2 ; 6]$.

III) Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 3]$ par $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 2$

On appelle (C) la courbe représentative de f

- Expliquer pourquoi f est dérivable sur I
- Calculer $f'(x)$, f' désignant la dérivée de f
- Montrer que $f'(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ pour tout x de I
- En déduire le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variation de f
- La fonction f admet-elle des extremums sur I ? En quels points ?
- La fonction f admet-elle un extremum local en $x = 1$?
- Donner une équation des tangentes à (C) aux points d'abscisses $x = -3$; $x = 0$ et $x = 1$
- Représenter (C) et les trois tangentes de la question précédente (On prendra comme unités graphiques 3cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Solution :

- f est une fonction polynôme dérivable sur \mathbb{R} donc sur I inclus dans \mathbb{R}

$$f'(x) = 4 \frac{x^3}{4} + 3 \frac{x^2}{3} - 5 \frac{2x}{2} + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

$$\text{On développe } (x - 1)^2(x + 3) = (x^2 - 2x + 1)(x + 3) = x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x + x + 3$$

$$= x^3 + x^2 - 5x + 3 = f'(x)$$

On va donc étudier le signe de $(x - 1)^2(x + 3)$ sur I

| | | | | |
|----------------------|----|----|---|---|
| x | -4 | -3 | 1 | 3 |
| Signe de $(x - 1)^2$ | + | + | 0 | + |
| Signe de $(x + 3)$ | - | 0 | + | + |
| Signe de $f'(x)$ | - | 0 | + | + |

Dressons le tableau de variations de f :

| | | | | | | | |
|-------------------|-----------------|----|-----------------|---|------------------|---|----------------|
| x | -4 | -3 | 1 | 3 | | | |
| Signe de $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | + | |
| Variations de f | $-\frac{34}{3}$ | | $-\frac{89}{4}$ | | $-\frac{11}{12}$ | | $\frac{55}{4}$ |

e) La fonction f admet un minimum en $x = -3$ et un maximum en $x = 3$; pour le minimum comme ce n'est pas une borne de l'intervalle de définition $f'(-3) = 0$ mais pour le maximum comme c'est une borne de l'intervalle de définition : $f'(3) \neq 0$

f) Non f n'admet pas d'extremum en $x = 1$ pourtant $f'(1) = 0$ mais f' ne change pas de signe en $x = 1$

g) En $x = -3$ $f'(-3) = 0$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{89}{4}$ elle est horizontale

En $x = 0$ $f'(0) = 3$ et $f(0) = -2$ donc comme la tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ son équation est $y = 3x - 2$

En $x = 1$ $f'(1) = 0$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{11}{12}$ elle est horizontale.

h) Courbes

