Fonctions $u + \lambda$ et λu

I) Fonction $u + \lambda$

1) Définition

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et soit λ un réel.
La fonction $u + \lambda$ est définie pour tout $x \in$ D par :
$\boldsymbol{x \mapsto (u + \lambda)(x) = u(x) + \lambda}$

Exemples

1°) Si u est la fonction $u(x) = |x|$ et $\lambda = 4$ alors $(u + \lambda)(x) = |x| + 4$

2°) Si u est la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ et $\lambda = -3$ alors $(u + \lambda)(x) = \sqrt{x} - 3$

2) Etude

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et monotone sur l'intervalle I (I $\subset$ D) et λ un réel. La fonction $u + \lambda$ possède sur I le même sens de variation que la fonction u.

Démonstration :

1er cas :

Supposons la fonction u croissante sur I :
Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \leq u(y)$
En ajoutant λ aux membres de l'inégalité, on obtient
$u(x) + \lambda \leq u(y) + \lambda$, c'est-à-dire : $(u + \lambda)(x) \leq (u + \lambda)(y)$
Ce qui prouve que la fonction $u + \lambda$ est, elle aussi, croissante sur I.

2eme cas :

Supposons la fonction u décroissante sur I :
Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \geq u(y)$
En ajoutant λ aux membres de l'inégalité, on obtient
$u(x) + \lambda \geq u(y) + \lambda$, c'est-à-dire : $(u + \lambda)(x) \geq (u + \lambda)(y)$
Ce qui prouve que la fonction $u + \lambda$ est, elle aussi, décroissante sur I

On dit que les fonctions u et $u + \lambda$ ont les mêmes variations sur I.

3) Courbes

Soit ($\mathscr{C}_1$) la courbe représentative de u et ($\mathscr{C}_2$) la courbe représentative de la fonction $u + \lambda$. Dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) ($\mathscr{C}_2$) est l'image de ($\mathscr{C}_1$) par la translation de vecteur $\vec{v} = \lambda\vec{j}$

Démonstration :

En effet :

pour tout M $(x, y) \in (\mathscr{C}_1)$ $\quad y = u(x)$, le point M′ (x' ; y') image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$ est tel que $x' = x$ et $y' = y + \lambda = u(x) + \lambda$ donc M′ ∈ ($\mathscr{C}_2$)

Réciproquement :

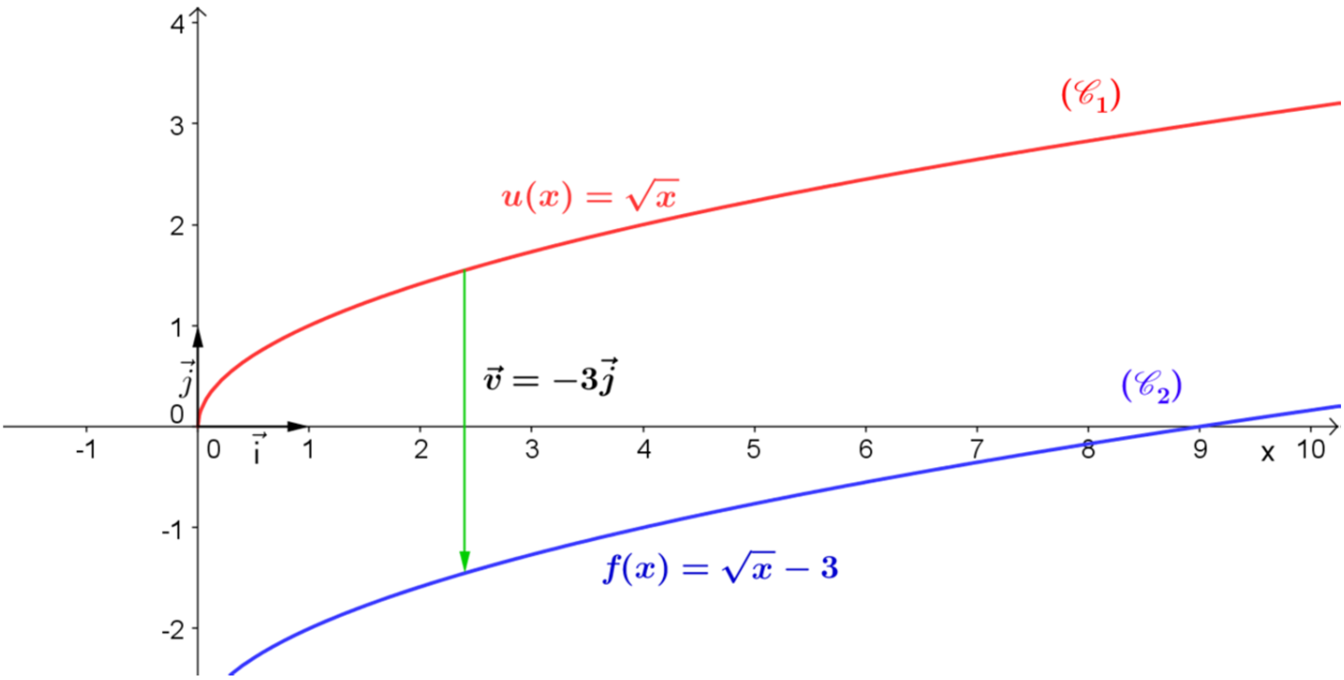
tout point N′ ∈ ($\mathscr{C}_2$) de coordonnées x' et $y' = u(x') + \lambda$ est l'image du point N de coordonnées $x = x'$ et $y = y' - \lambda = u(x)$ appartenant à (C_1)

Exemples :

1°) Etude et courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x} - 3$

La fonction f est définie sur D = [0 ; + ∞[car la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ est définie sur D.

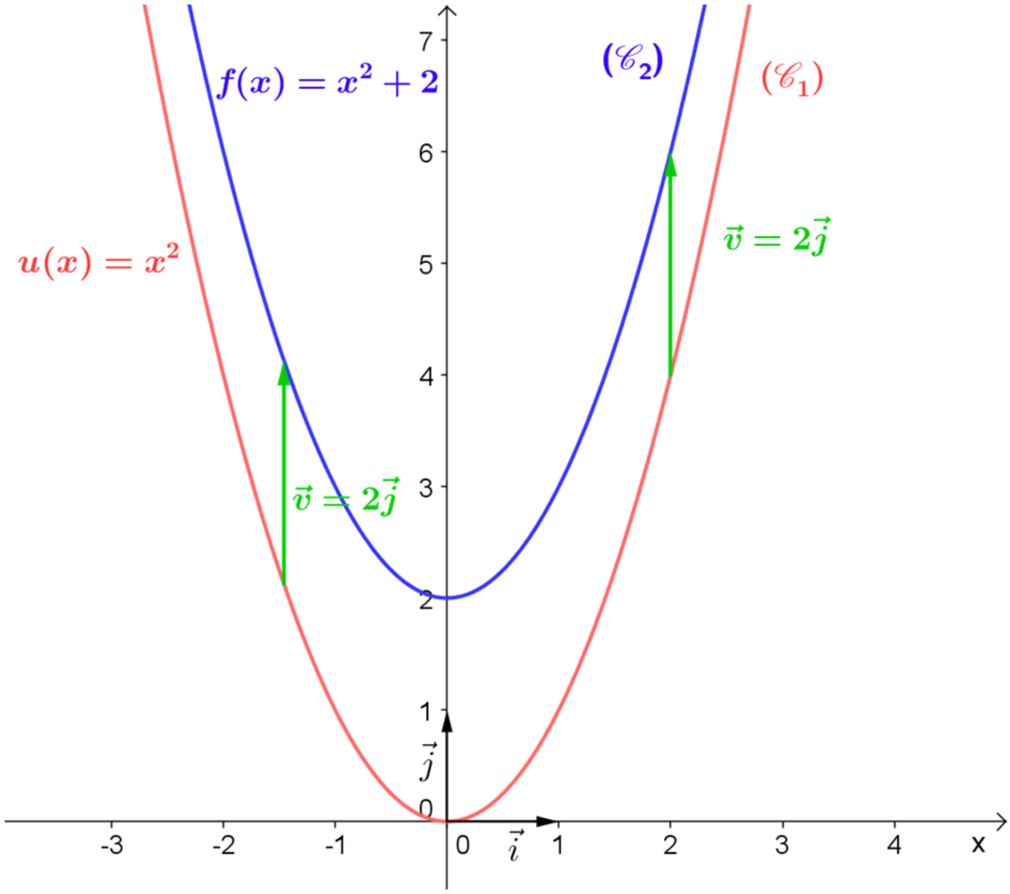
La fonction f est croissante sur D car la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ est croissante sur D.



2°) Etude et courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $u(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est décroissante sur$]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme la fonction $u(x) = x^2$.



II) Fonction λu

1) Définition

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et soit λ un réel non nul.
La fonction λu est définie pour tout $x \in$ D par

$$x \longmapsto (\lambda u)(x) = \lambda\, u(x)$$

Exemples

1°) Si u est la fonction $u(x) = |\,x\,|$ et $\lambda = 4$ alors $(\lambda u)(x) = 4\,|\,x\,|$

2°) Si u est la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ et $\lambda = -3$ alors $(\lambda u)(x) = -3\sqrt{x}$

3°) Si u est la fonction $u(x) = x^2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ alors $(\lambda u)(x) = \frac{1}{2}\,x^2$

2) Etude

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et monotone sur l'intervalle I (I $\subset$ D) et λ un réel.

• Si $\lambda > 0$ La fonction λu possède sur I le même sens de variation que la fonction u.

• Si $\lambda < 0$ La fonction λu possède sur I le sens de variation contraire de la fonction u.

Démonstration :

• $\lambda > 0$

1er cas :

Supposons la fonction u croissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \leq u(y)$

En multipliant par le nombre λ ($\lambda > 0$) les deux membres de l'inégalité, on obtient:

$\lambda u(x) \leq \lambda u(y)$, c'est-à-dire : $(\lambda u)(x) \leq (\lambda u)(y)$

Ce qui prouve que la fonction λu est, elle aussi, croissante sur I

2eme cas :

Supposons la fonction u décroissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \geq u(y)$

En multipliant par le nombre λ ($\lambda > 0$) les deux membres de l'inégalité, on obtient:

$\lambda u(x) \geq \lambda u(y)$, c'est-à-dire : $(\lambda u)(x) \geq (\lambda u)(y)$

Ce qui prouve que la fonction λu est, elle aussi, décroissante sur I

• $\lambda < 0$

1er cas :

Supposons la fonction u croissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \leq u(y)$

En multipliant par le nombre λ ($\lambda < 0$) les deux membres de l'inégalité, on obtient:

$\lambda u(x) \geq \lambda u(y)$, c'est-à-dire : $(\lambda u)(x) \geq (\lambda u)(y)$

Ce qui prouve que la fonction λu est décroissante sur I

Son sens de variation est donc contraire à celui de la fonction u

2emecas :

Supposons la fonction u décroissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \geq u(y)$

En multipliant par le nombre λ (λ < 0) les deux membres de l'inégalité, on obtient :

$\lambda\, u(x) \leq \lambda\, u(y)$, c'est-à-dire : $(\lambda u)(x) \leq (\lambda u)(y)$

Ce qui prouve que la fonction λu est croissante sur I .
Son sens de variation est donc contraire à celui de la fonction u

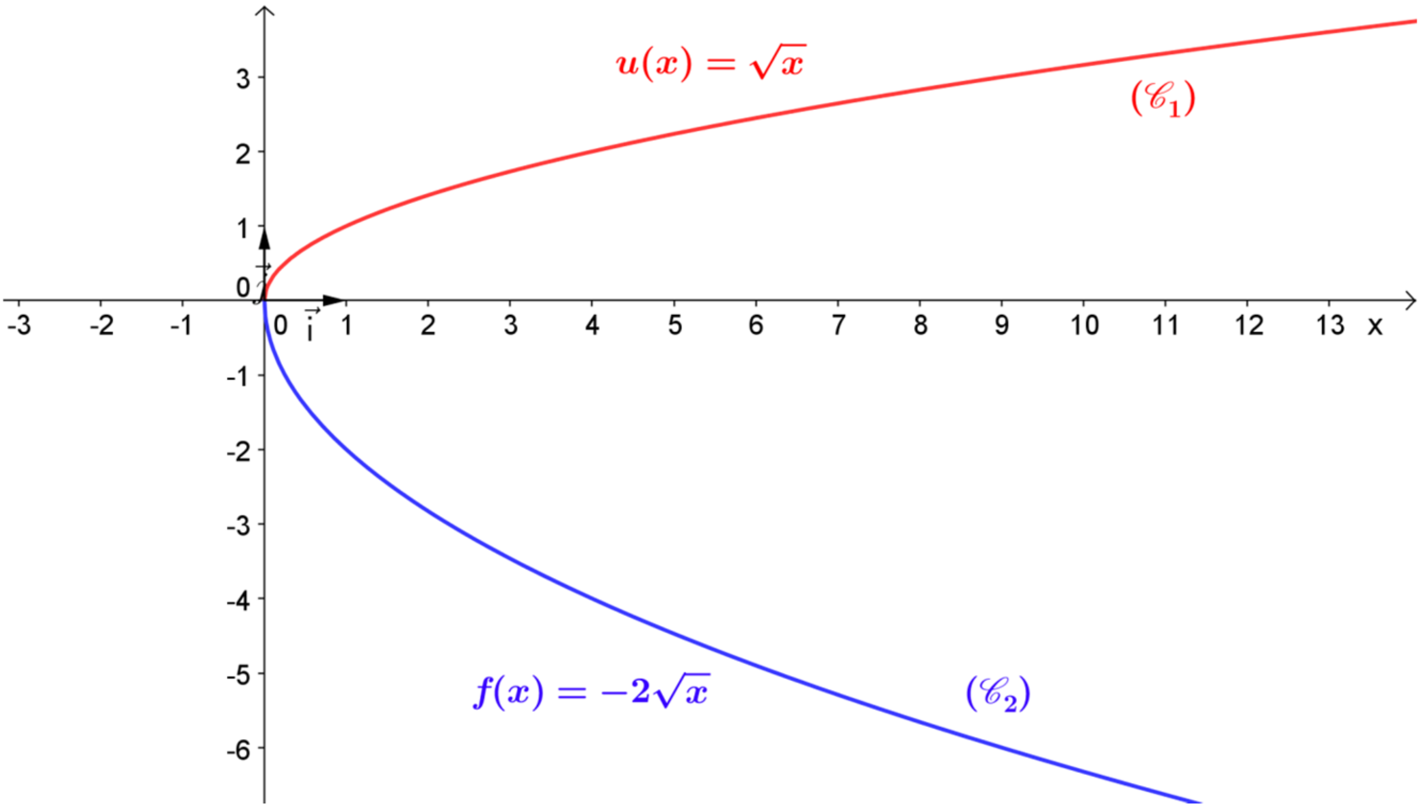
3) Courbes

Soit ($\mathscr{C}_1$) la courbe représentative de u et ($\mathscr{C}_2$) la courbe représentative de la fonction λu .Dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) on obtient ($\mathscr{C}_2$)en multipliant les ordonnées des points de ($\mathscr{C}_1$) par λ.

Exemples :

1°) Etude et courbe de la fonction f définie par $f(x) = -2\sqrt{x}$

La fonction f est définie sur D = [0 ; + ∞[car la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ est définie sur D.
Comme λ < 0 la fonction f est décroissante sur D car la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ est croissante sur D.

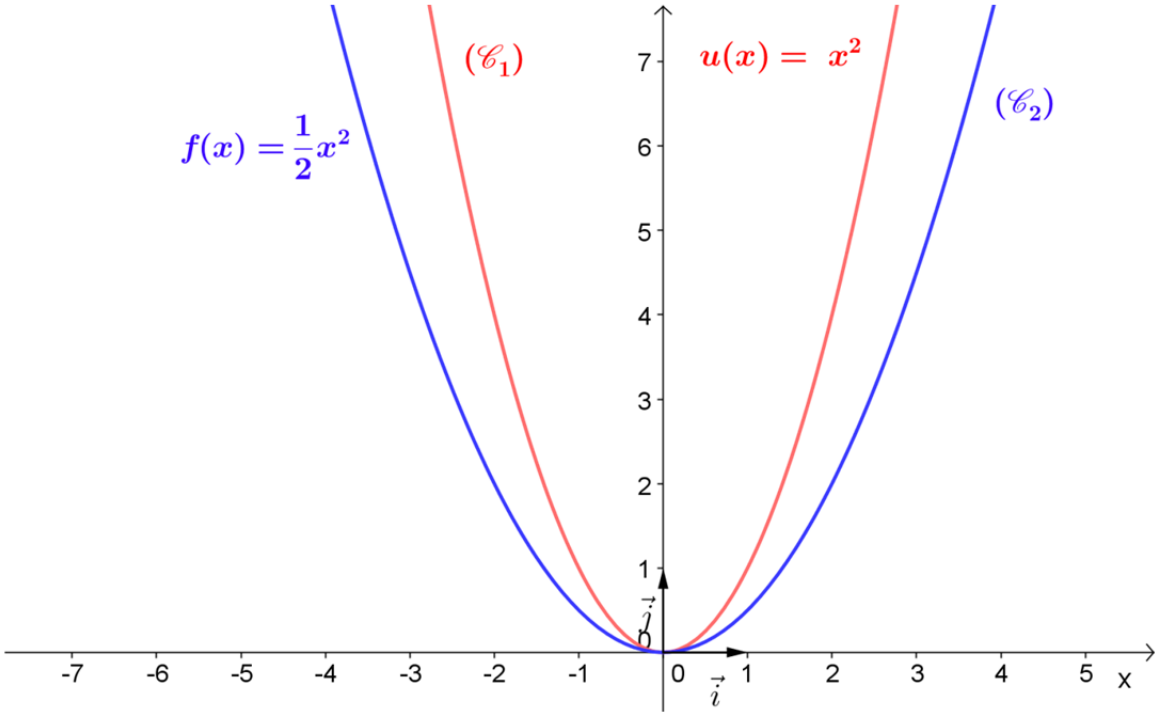


2°) Etude et courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $u(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lambda > 0$

La fonction f est décroissante sur$]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme la fonction $u(x) = x^2$.



Exemple plus complexe

Etude et courbe de la fonction f définie par $f(x) = -|x| + 2$

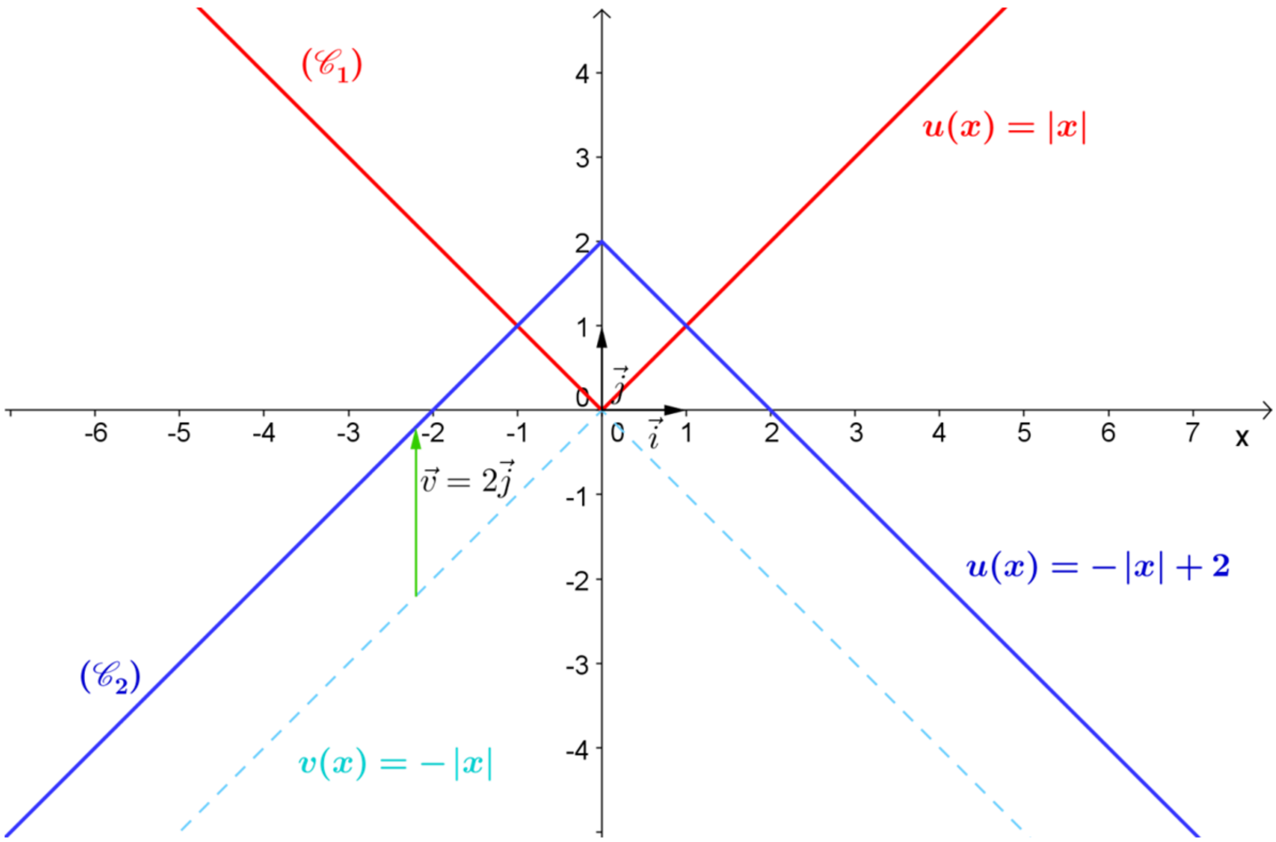
Dans ce cas on doit utiliser les résultats obtenus dans le I) et dans le II)

On considère la fonction u définie par $u(x) = |x|$

u est définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

donc la fonction v définie par $v(x) = -|x|$ est définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ puisque $v(x) = \lambda\, u(x)$ avec $\lambda = -1$

Enfin f est définie par $f(x) = v(x) + 2$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et a le même sens de variation que la fonction v.



$(\mathscr{C}_1)$
$u(x) = |x|$
$(\mathscr{C}_2)$
$u(x) = -|x| + 2$
$v(x) = -|x|$
$\vec{v} = 2\vec{j}$
$\vec{i}$
$\vec{j}$
x