Nombre dérivé et tangente

I) Interprétation graphique

1) Taux de variation d'une fonction en un point.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On appelle A et B les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives a et $a+h$ (h étant un réel non nul positif ou négatif).

Ainsi on a A (a ; $f(a)$) et B ($a+h$; $f(a+h)$)

La droite (AB) a pour coefficient directeur $m = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$

Ce nombre m est appelé taux de variation de la fonction f en a

Remarque : La droite (AB) est quelquefois appelée ***corde*** à la courbe $(\mathcal{C})$ en A

Exemples :

1°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$

La courbe de f est représentée sur la figure ci-contre, avec $a = 1{,}5$.
Ainsi :

$f(a) = f(1{,}5) = 0{,}25$ et soit $h \neq 0$

$f(a+h) = f(1{,}5+h) = (h+0{,}5)^2$

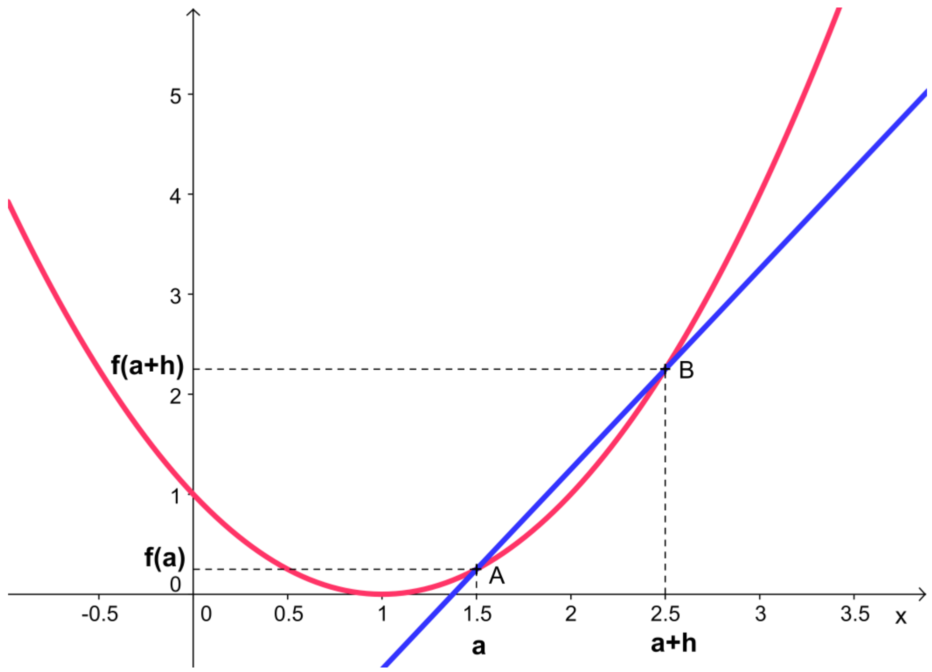
De là le taux de variation de f en 1,5 vaut :

$m = \dfrac{(h+0{,}5)^2 - 0{,}25}{h} = \dfrac{h^2 + h + 0{,}25 - 0{,}25}{h}$

$m = \dfrac{h^2+h}{h}$

$m = \dfrac{\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}}$ comme $h \neq 0$ alors

$m = h+1$



2°) Soit f la fonction définie sur I =] 2 ; +∞[par $\boldsymbol{f(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x-4}}$

La courbe de f est représentée sur la figure ci-contre, avec a = 4.
Ainsi

$f(a) = f(4) = \dfrac{1}{4}$ et soit $h \neq 0$

$f(a+h) = f(4+h) = \dfrac{1}{2(4+h)-4}$

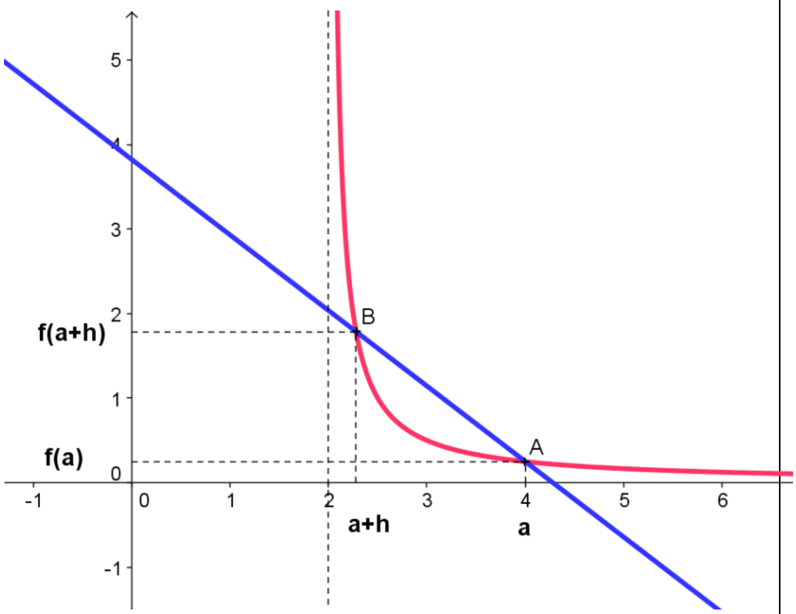
$f(a+h) = \dfrac{1}{2h+4}$

Remarque : sur la figure on a choisi h négatif, mais on doit choisir $h > -2$ pour que $a+h$ appartienne à I

De là le taux de variation de f en 4 vaut :

$$m = \frac{\frac{1}{2h+4} - \frac{1}{4}}{h} = \frac{\frac{4-(2h+4)}{4(2h+4)}}{h}$$

$$m = \frac{\frac{-2h}{4(2h+4)}}{h} = \frac{-2}{4(2h+4)}$$



2) Tangente et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On appelle A et B les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives a et $a + h$ (h étant un réel non nul positif ou négatif).

Soit m le taux de variation de f en a.

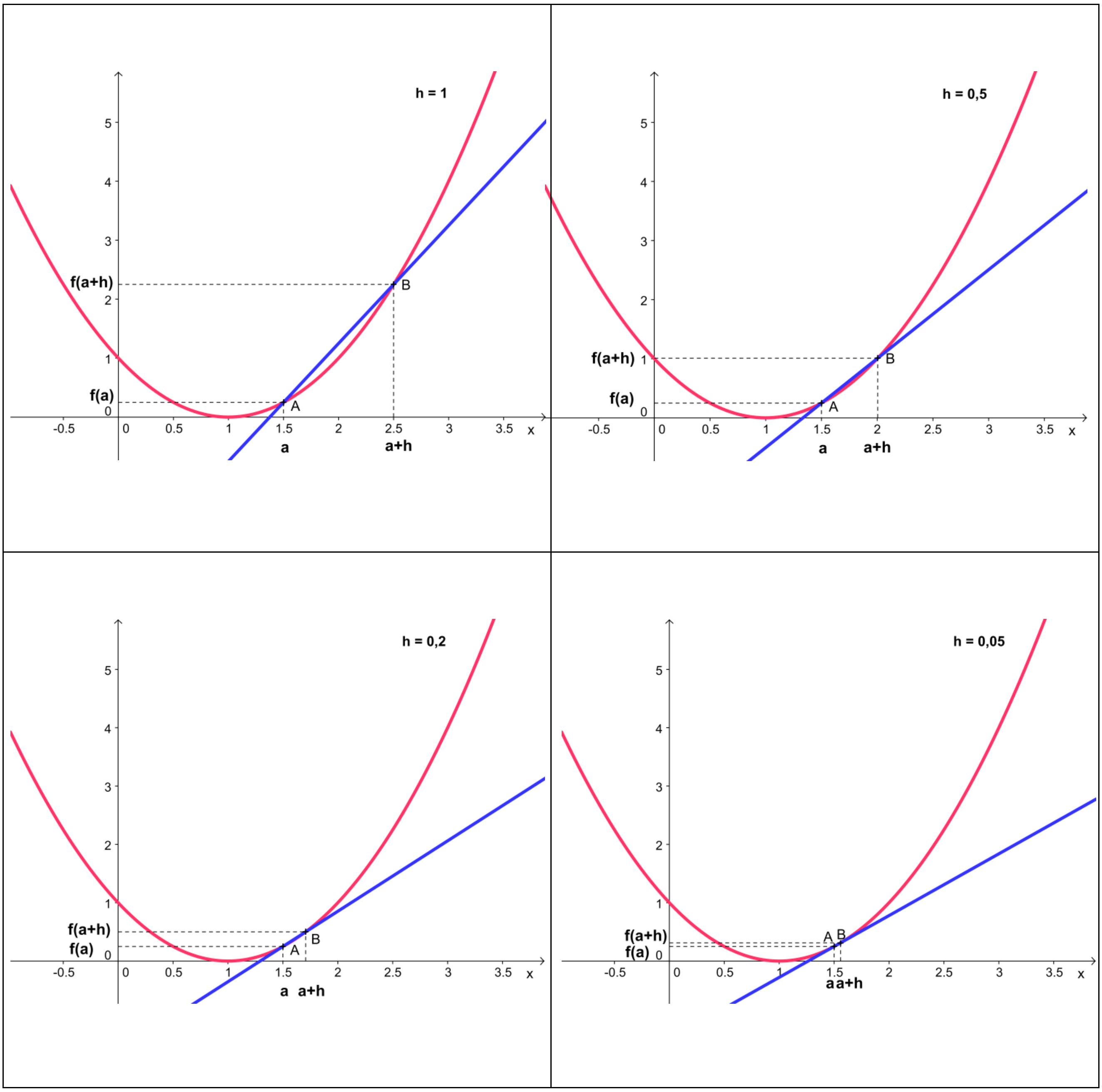
On déplace le point B sur la courbe $(\mathcal{C})$ en le rapprochant de A (on dit que l'on fait tendre B vers A) et on étudie le comportement du nombre m.

Par conséquent on étudie le comportement de m lorsque h prend des valeurs de plus en plus proche de zéro. (On dit que h tend vers 0).

Exemples :

On reprend les exemples étudiés au 1)

1°) Figures obtenues :



A l'aide des graphiques ci-dessus on peut conjecturer que lorsque B tend vers A, c'est à dire lorsque h tend vers zéro, la droite (AB) semble prendre une position limite, dont le coefficient directeur serait la valeur prise par m lorsque h devient nul.

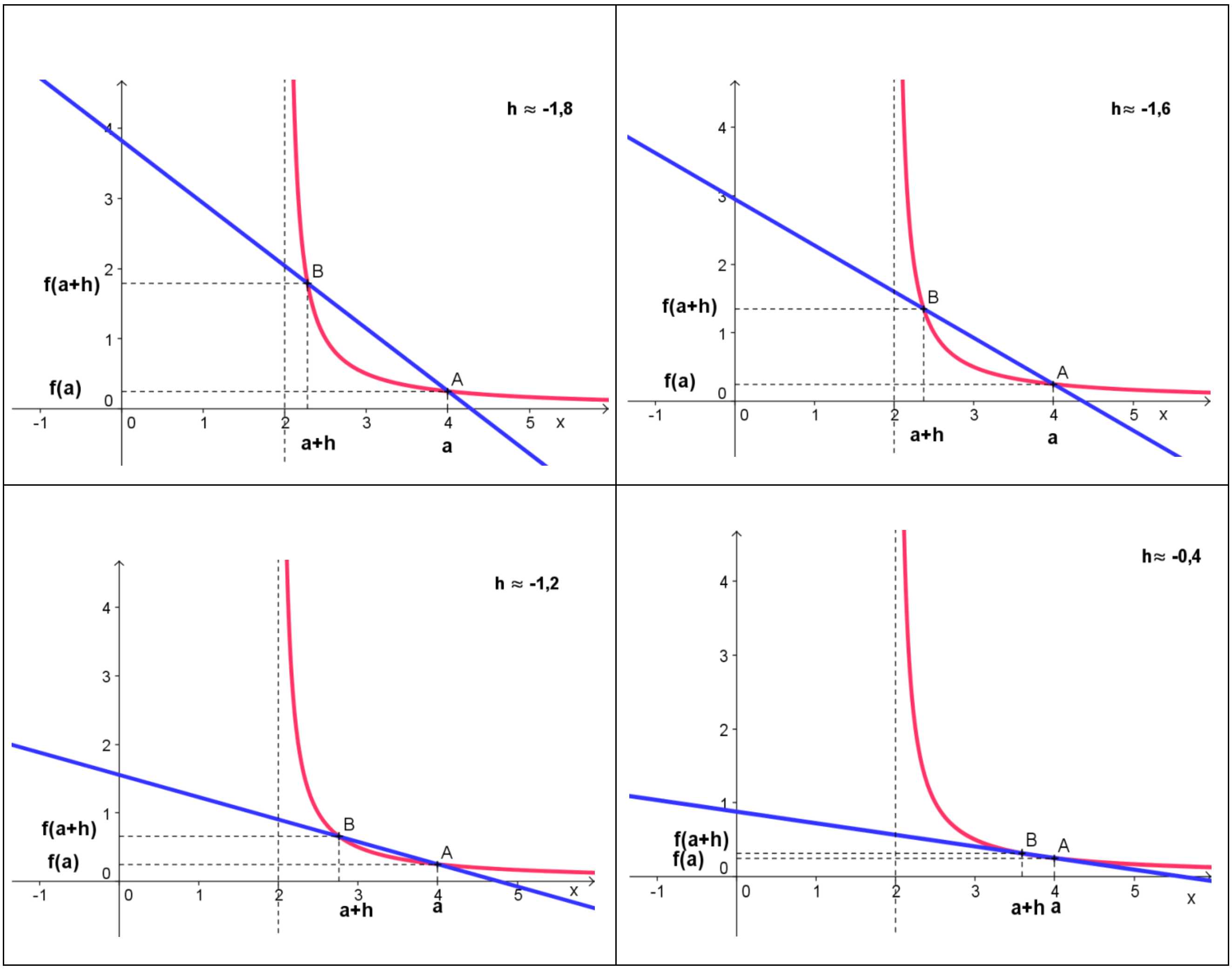
On appelle cette valeur (si elle existe) la ***limite de m lorsque h tend vers zéro***

Dans cet exemple on a $m = h + 1$ donc la limite de m lorsque h tend vers zéro est 1, que l'on on note :

$$\lim_{h \to 0} m = 1$$

La droite (AB) prend donc une « position limite » et dans cette position, elle est appelée **<u>tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 1,5</u>** donc le coefficient directeur est 1

2°) Figures obtenues :



Là encore à l'aide des graphiques ci-dessus on peut conjecturer que lorsque B tend vers A, c'est à dire lorsque h tend vers zéro, la droite (AB) semble prendre une position limite, dont le coefficient directeur serait la valeur prise par m lorsque h devient nul.

Dans cet exemple on a $m = \frac{-2}{4(2h+4)}$ donc la limite de m lorsque h tend vers zéro est $\frac{-1}{8}$, que l'on on note :

$$\lim_{h \to 0} m = \frac{-2}{16}$$

ou

$$\lim_{h \to 0} m = \frac{-1}{8}$$

La droite (AB) prend donc une « position limite » et dans cette position, elle est appelée **<u>tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 4</u>** donc le coefficient directeur est $\frac{-1}{8}$

II) Définitions

1) Fonction dérivable en un point et nombre dérivé.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On dit que la fonction f est dérivable au point d'abscisse a si et seulement si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers zéro. On note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.

Exemples :

1°) Soit $f(x) = x^2 - 3$, calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 3

Calcul du taux de variation : Pour $h \neq 0$: $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$f(3) = 3^2 - 3 = 6$ et $f(3+h) = (3+h)^2 - 3 = 9 + 6h + h^2 - 3 = h^2 + 6h + 6$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{h^2+6h+6-6}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = 6 + h$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \to 0}(6+h) = 6$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 3 et $f'(3)$=6

2°) Soit $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ Calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Calcul du taux de variation $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$f(0+h) = \frac{4h}{h+2}$ $f(0) = 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{4h}{h+2}}{h} = \frac{4}{h+2}$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{4}{h+2}\right) = 2$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 0 et $f'(0) = 2$

3°) Soit $f(x) = \sqrt{x}$ **.** Calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Remarque préliminaire: la question peut être posée puisque f est définie en zéro

Calcul du taux de variation $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

On constate que le taux de variation prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque h tend vers zéro, donc il n'existe pas de réel représentant sa limite.

f n'est pas dérivable en zéro, le nombre dérivé de f en zéro n'existe pas

2) Tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction dérivable en a, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse a.

La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A (a ; (a)) est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage du point A.

3) Equation de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en a, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse a.

La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque : La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage du point A.

Démonstration :

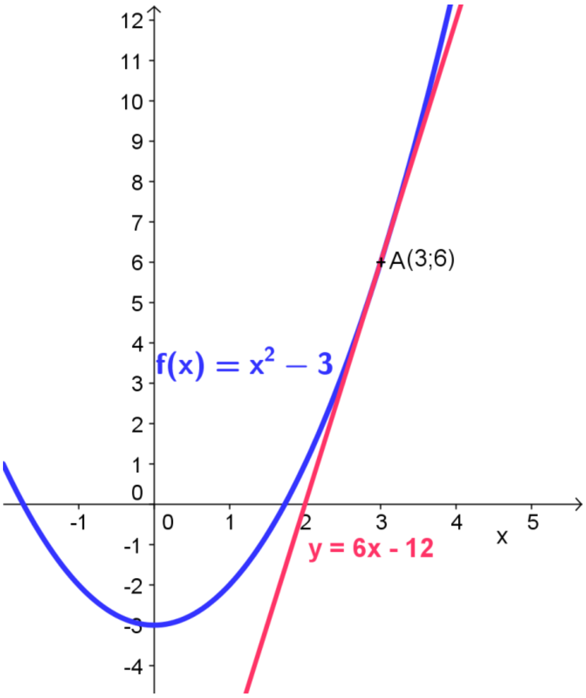
D'après la définition la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse à une équation de la forme : $y = f'(a)\,x + b$
Comme A(a ; $f(a)$) appartient à T on a : $f(a) = f'(a)a + b$ d'où $b = f(a) - f'(a)a$

Donc on obtient $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ et finalement $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemples :

1°) Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

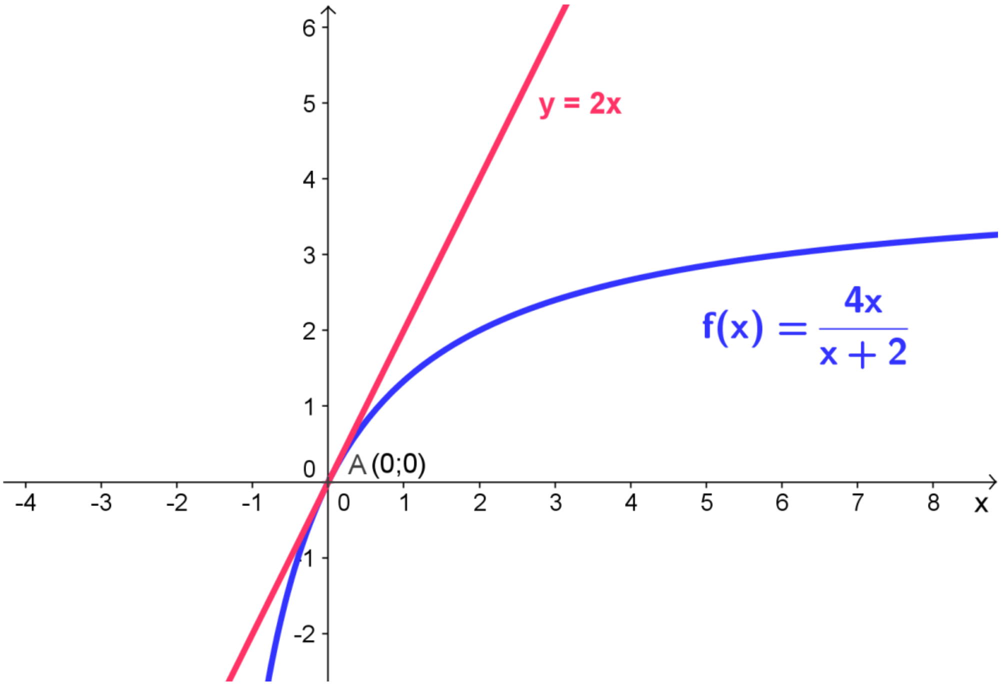
On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :
$y = 6(x - 3) + 6 \quad \text{soit} \quad y = 6x - 12$



2°) Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie par $f\ (x) = \dfrac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est : $y = 2x$

$$y = 2x$$



y = 2x
f(x) = 4x / (x + 2)
A (0;0)
x