Fonction racine carrée

I) Définition

On appelle fonction racine carrée, la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[, qui a tout réel x associe $\sqrt{x}$ nombre réel positif tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

On notera dans la suite $f(x) = \sqrt{x}$

Exemples :

$f(4) = 2$; $f(100) = 10$; $f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$

II) Etude

1) Variations de f sur [0 ; + ∞ [

Soient u et v deux réels positifs ou nuls

Comparons $f(u)$ et $f(v)$

On sait que $(\sqrt{u}-\sqrt{v})(\sqrt{u}+\sqrt{v}) = \sqrt{u}^{\,2} - \sqrt{v}^{\,2} = u - v$ d'après la définition de f

Donc $f(u) - f(v) = \dfrac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$

d'où $f(u) - f(v)$ possède le même signe que $u - v$ (car $\sqrt{u}+\sqrt{v} \geq 0$ par définition)

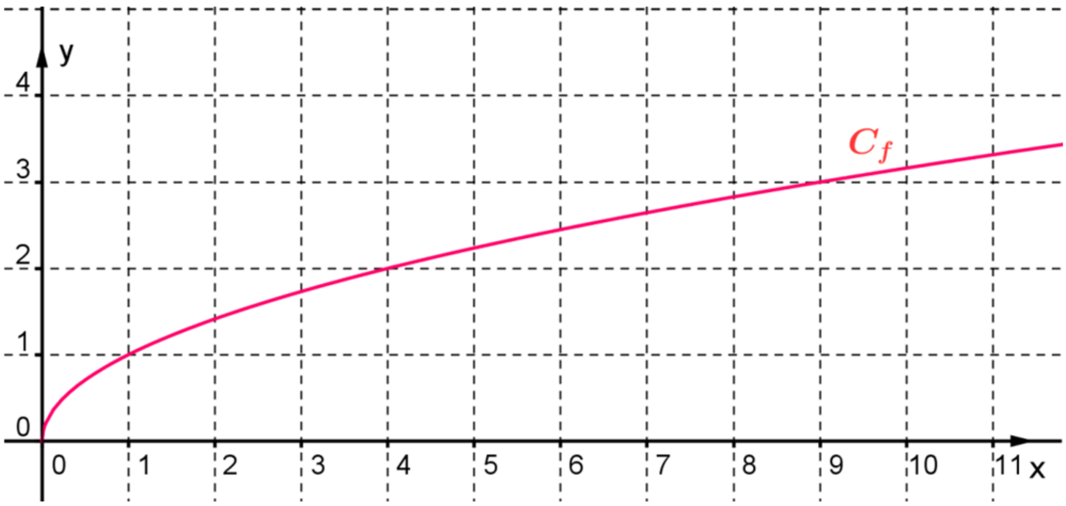
La fonction f est donc strictement croissante sur [0 ; + ∞[,

2) Tableau de variations et courbe :

a) Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

b) Courbe



III) Compléments

1) Equations et inéquations:

a) Equation $\sqrt{x} = k$ avec x positif ou nul

D'après la définition de la fonction racine carrée, on a :

- **Si $k \geq 0$ $\quad \sqrt{x} = k$ possède une solution $\quad x = k^2$**
- **Si $k < 0$ $\quad \sqrt{x} = k$ ne possède aucune solution.**

Exemples :

1°) Résoudre l'équation $\sqrt{x} = 5$ Solution $x = 25$

2°) Résoudre l'équation $\sqrt{x} = -3$ L'équation n'a aucune solution

b) Equation $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ avec x et y positifs ou nuls

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur [0 ; +∞[l'équation $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ avec x et y positifs ou nuls est équivalente à l'équation $x = y$

Exemples :

1°) Résoudre l'équation $\sqrt{x} = \sqrt{2}$.
La solution de cette équation est $x = 2$

2°) Résoudre l'équation $\sqrt{3x-4} = \sqrt{x}$.

On ne peut résoudre cette équation que si $3x - 4 \geq 0$ **et** $x \geq 0$ soit $x \geq \frac{4}{3}$

Si $x \geq \frac{4}{3}$ alors l'équation est équivalente à $3x - 4 = x$ soit $x = 2$

L'équation admet donc une solution $x = 2$ car $2 \geq \frac{4}{3}$.

3°) Résoudre l'équation $\sqrt{2x-8} = \sqrt{2-x}$.

On ne peut résoudre cette équation que si : $2x - 8 \geq 0$ **et** $2 - x \geq 0$ c'est-à-dire:

$x \geq 4$ **et** $x \leq 2$ **ce qui est impossible donc S = $\varnothing$.**

4°) Résoudre l'équation $\sqrt{5x+10} = \sqrt{20x+50}$.

On ne peut résoudre cette équation que si $5x + 10 \geq 0$ et $20x + 50 \geq 0$

soit $x \in [-2 ;+\infty[$ alors l'équation est équivalente à $5x + 10 = 20x + 50$

soit $x = -\frac{40}{15}$

Mais $-\frac{40}{15} \notin [-2 ;+\infty[$ donc **l'équation n'a aucune solution**.

5°) Résoudre l'équation $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{x+1}$

. On ne peut résoudre cette équation que si $4 - x^2 \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$

soit $x \in [-1\,;2]$ alors l'équation est équivalente à $4 - x^2 = x + 1$

C'est-à-dire : $-x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 3 = 13$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{-2} < -2$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{-2}$ $1 < x_2 < 2$ donc l'équation a une solution $\frac{1-\sqrt{13}}{-2}$

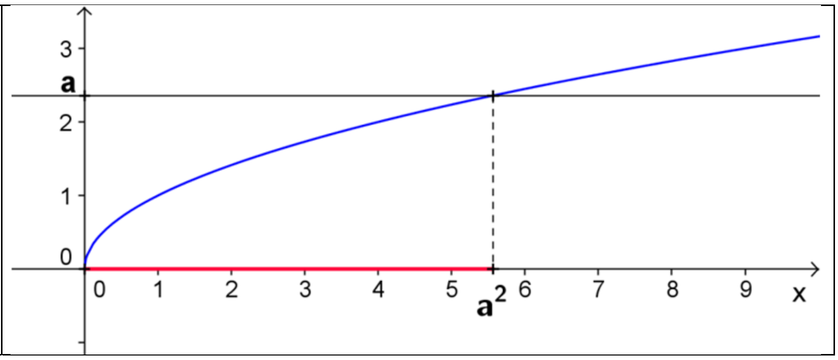
L'interprétation géométrique de cette équation est l'intersection d'un demi-cercle avec une demi-parabole

c) Inéquation $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ avec x et y positifs ou nuls

- ### Inéquation $\sqrt{x} \leq a$

Si $a < 0$ l'inéquation ***n'a aucune solution*** car $\sqrt{x}$ est positif ou nul

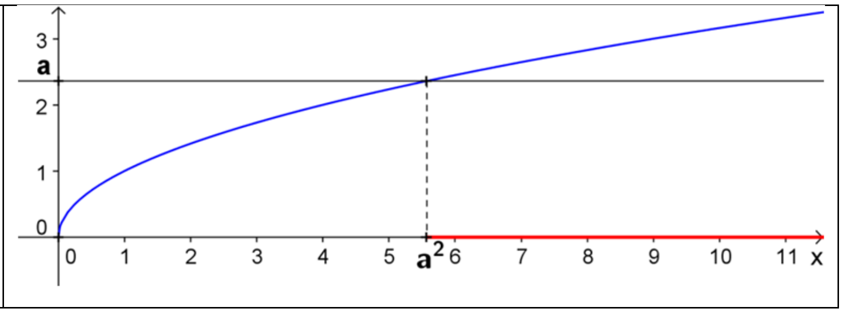
Si $a \geq 0$ l'inéquation a pour ensemble de solutions ***l'intervalle [0 ; a²]***



- ### Inéquation $\sqrt{x} \geq a$

Si $a < 0$ l'inéquation ***a pour solutions l'ensemble*** $\mathbb{R}$ car $\sqrt{x}$ est positif ou nul

Si $a \geq 0$ l'inéquation a pour ensemble de solutions ***l'intervalle [a² ; + ∞ [***



Exemples :

1°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leq 3$ L'ensemble des solutions: $x \in [\,0\,;\,9\,]$

2°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq -2$ L'ensemble des solutions : $\mathbb{R}$

3°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leq -1$ L'ensemble des solutions: $\varnothing$

4°) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq \frac{3}{5}$ L'ensemble des solutions: $[\,\frac{9}{25}\,;\,+\infty\,[$

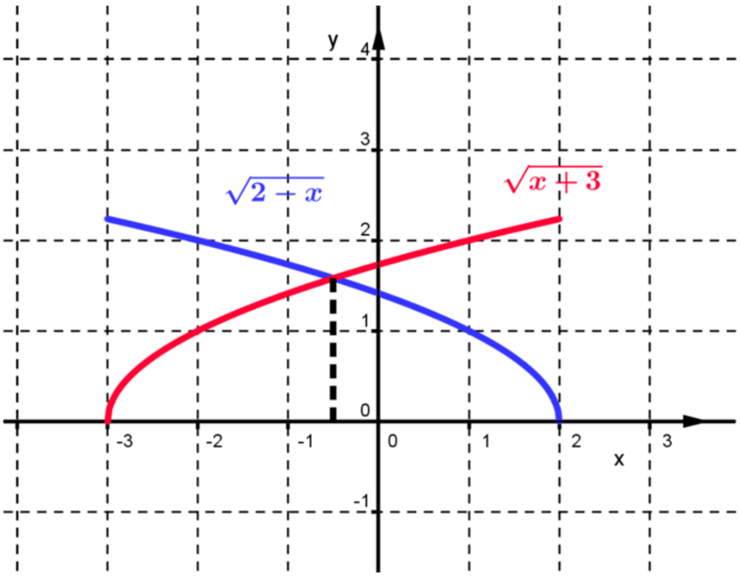
Autre exemple : Résoudre l'inéquation $\sqrt{2-x} \geq \sqrt{x+3}$

On ne peut résoudre cette équation que si 2 – x ≥ 0 et x + 3 ≥0

soit $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{-3} ; \mathbf{2}]$ alors l'inéquation est équivalente à $2 - x \geq x + 3$

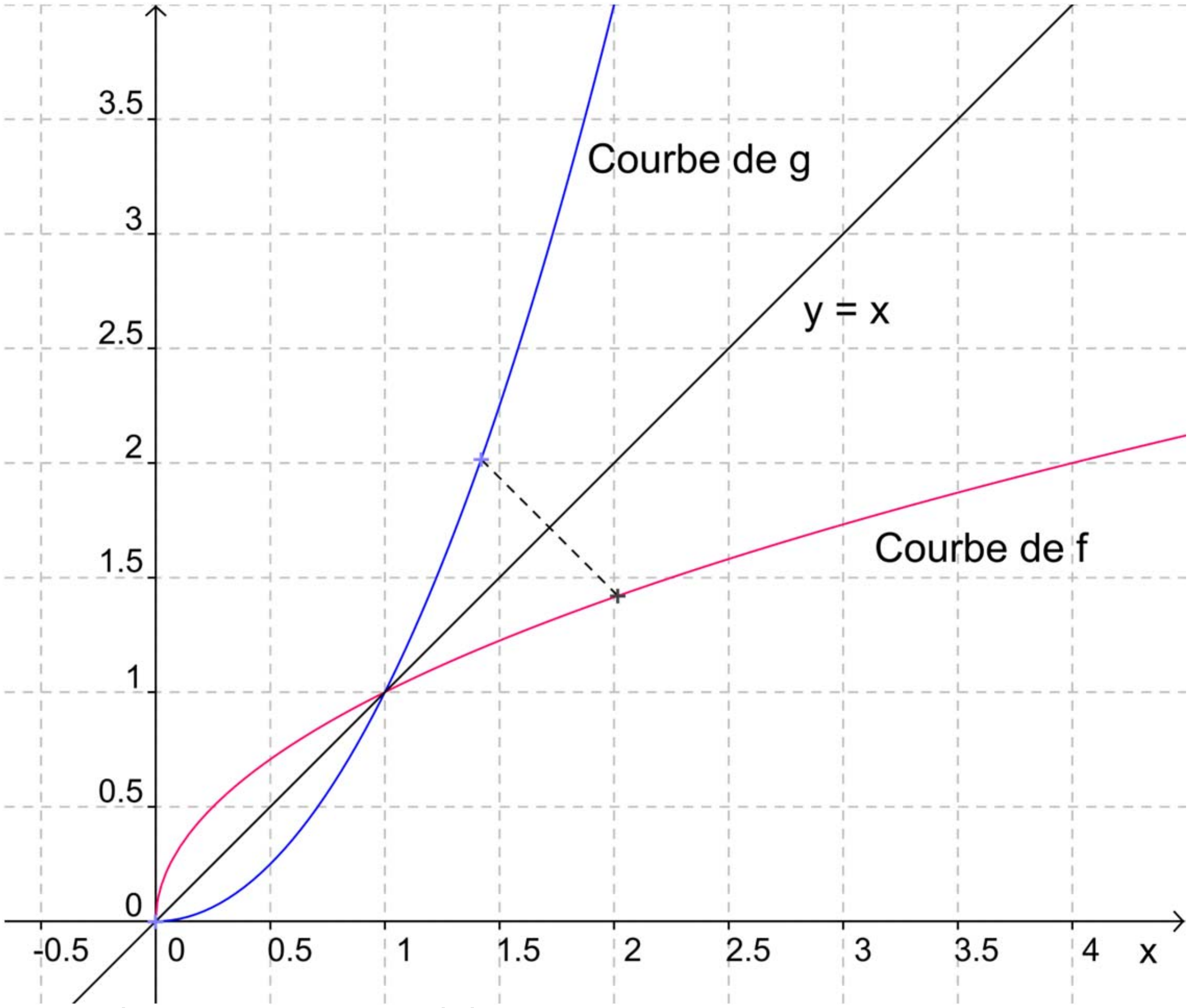
soit $2x \leq -1$ C'est-à-dire : $x \leq -\frac{1}{2}$

Donc $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{-3} ; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}]$ L'ensemble des solutions est donc : $[\mathbf{-3} ; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}]$



2) Remarque :

Si on trace en repère orthonormé la représentation graphique de la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et celle de la fonction g définie par $g(x) = x^2$ avec $x \geq 0$ alors les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



On peut à partir du graphique précédent conclure que :

Si $x \in [0\ ;1]$ on a $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

Si i $x \in [1\ ;+\infty[$ on a $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$