Application du produit scalaire: trigonométrie

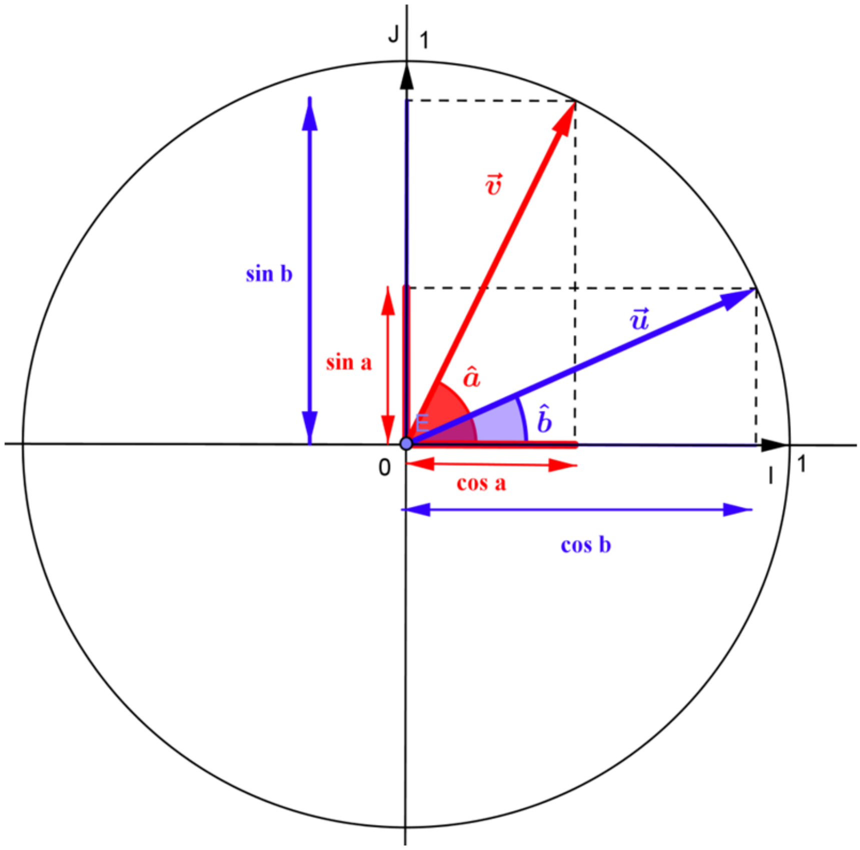
I) Formules d'addition

1) Formules :

Pour tout nombre réel a et b,

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

2) Démonstration :



- $\vec{u}\binom{\cos b}{\sin b}$ $\qquad\qquad$ $\vec{v}\binom{\cos a}{\sin a}$

$\vec{u}.\vec{v}$ **= cos b cos a + sin b sin a**

Nous avons aussi :

$\vec{u}.\vec{v} = \underbrace{\|\vec{u}\|}\ \underbrace{\|\vec{v}\|}\ \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ \cos(a-b) =$

$\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 \cos(a-b) =$ **cos(a–b)**

On obtient donc : **cos(a–b) = cos b cos a + sin b sin a**

- cos (a + b) = cos (a – (-b)) en utilisant la formule précédente on obtient :

cos (a + b) = cos(-b) cos a + sin(-b) sina or cos (-b) = cos b et sin(-b) = - sin b

On obtient donc :

cos (a + b) = cos b cos a – sinb sina

- sin(a–b) = $\cos(\frac{\pi}{2} - (a-b))$ = $\cos((\frac{\pi}{2} - a) + b)$ = cos b $\cos(\frac{\pi}{2} - a)$ – sin b $\sin(\frac{\pi}{2} - a)$

Or $\cos(\frac{\pi}{2} - a)$ = sin a et $\sin(\frac{\pi}{2} - a)$ = cos a d'où :

sin(a–b) = cos b sin a – sin b cos a

- sin (a + b) = sin (a – (-b)) en utilisant la formule précédente on obtient :

sin(a + b) = cos(-b) sin a - sin(-b) cosa or cos (-b) = cos b et sin(-b) = - sin b

On obtient donc :

sin (a + b) = cos b sina + sin b cos a

3) Exemples :

Exemple 1 :

a) Montrer que $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

b) En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{5\pi}{12}$ et de sin $\frac{5\pi}{12}$

Solution :

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{6\times\pi}{6\times4} + \frac{4\times\pi}{4\times6} = \frac{6\pi}{24} + \frac{4\pi}{24} = \frac{10\pi}{24} = \frac{2\times5\pi}{2\times12} = \mathbf{\frac{5\pi}{12}}$

b)

• $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

On obtient donc :

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\mathbf{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et

• $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

On obtient donc :

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\mathbf{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

Exemple 2 :

a) Montrer que $\mathbf{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$

Solution :

a) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\times\pi}{4\times3} - \frac{3\times\pi}{3\times4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \mathbf{\frac{\pi}{12}}$

b)

- $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient donc :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ et

- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient donc :

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

Exemple 3 :

a) Exprimer en fonction de cos x et sin x :

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Solution :

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}$ Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient donc :

$\boldsymbol{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}$ et

- $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}$ Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient donc :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

b) Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Solution :

- $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3}$ Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient donc :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$ et

- $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3}$ Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient donc :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

II) Formules de duplications

1) Formule

Pour tout nombre réel a,

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

2) Démonstration :

• **cos (2a)** = cos (a + a) = cos a cos a - sin a sin a = **cos²a - sin²a**

= cos²a - (1 – cos² a) = cos²a -1 + cos² a = **2 cos²a – 1** = 2 (1-sin² a)- 1

= 2 – 2sin² a – 1 = **1 – 2sin² a**

• **sin (2a)** = sin (a + a) = cos a sin a + sin a cos a = **2 cos a sin a**

3) Exemples :

Exemple 1: Calculer cos $(\frac{\pi}{8})$ et sin $(\frac{\pi}{8})$

Solution :

• $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$ on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$

Or $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\frac{\pi}{8} \geq 0$ donc :

$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\mathbf{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

• $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donc :

$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$

$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Or $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$ donc :

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exemple 2: Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solution :

- $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$ on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$

Or $0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\frac{\pi}{12} \geq 0$ donc :

$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

- $\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$ donc :

$2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$

$2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Or $0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\frac{\pi}{12} \geq 0$ donc :

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Remarque : Nous avons trouvé précédemment dans le I) les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$ qui sont :

cos $\frac{\pi}{12}$ = $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et sin $\frac{\pi}{12}$ = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

On peut démontrer que : $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et que $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Comme toutes les expressions sont positives, il suffit de les mettre au carré et de calculer.

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) sin2x = sin x

Solution :

Pour tout nombre réel x :

sin2x = 2 sin$x$ cos$x$

L'équation peut donc s'écrire :

2 sin$x$ cos$x$ = sin x

2 sin$x$ cos$x$ − sin x = 0

2sin$x$ cos$x$ − sin$x$ = 0

sin$x$ (2cos$x$ − 1) = 0

sin$x$ = 0 ou 2cos$x$ − 1 = 0

• sin$x$ = 0 a pour solution $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

• cos$x$ = $\frac{1}{2}$ a pour solution $x = \frac{\pi}{3}$ +2 $k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ +2 $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

donc l'ensemble des solutions est :

S = $\left\{k\pi ; -\frac{\pi}{3} + 2\,k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2\,k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

b) sin4x + sin^2 x = cos² x

ce qui est équivalent à :

sin4x = cos² x − sin^2 x Or sin4x = 2sin $2x$ cos $2x$ et cos² x – sin² x = cos 2 x

On obtient donc :

2sin $2x$ cos $2x$ = cos 2 x

2sin2x cos2x - cos2x = 0

cos 2 x (2sin $2x - 1$) = 0

$\cos 2x = 0$ ou $2\sin 2x - 1 = 0$

$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ ou $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ ou $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

• $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ a pour solutions :

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

• $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$ a pour solutions :

$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

S= $\boldsymbol{\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi ; -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{12} + k\pi ; \frac{5\pi}{12} + k\pi\right\} k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}}$

Solution :

Comme $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ alors

$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

S = $\boldsymbol{\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \quad k \in \mathbb{Z}}$