Définition du produit scalaire

I) Norme d'un vecteur:

1) Définition:

Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme de $\vec{u}$, noté $\| \vec{u} \|$, la distance AB.

$\| \vec{u} \|$ = $\| \overrightarrow{AB} \|$ = AB

Lorsque $\| \vec{u} \|$ = 1, on dit que le vecteur est unitaire.

2) Propriétés:

Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$.

Dans ce cas :

● $\| \vec{u} \|$ = $\sqrt{x^2 + y^2}$

● Pour tout réel λ, et tout vecteur $\vec{u}$ alors $\|\lambda \vec{u} \|$ = $|\lambda| \times \| \vec{u} \|$

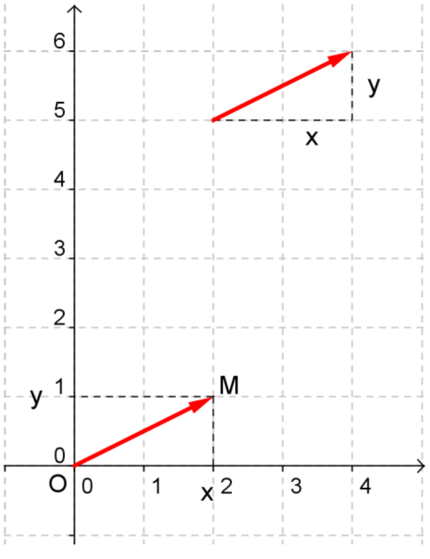
<u>Démonstration</u>:

● Dans un repère orthonormé, d'origine O, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$.

Dans ce repère, M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

M a aussi pour coordonnées $(x\ ;\ y)$

$\| \vec{u} \|$ = OM = $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ = $\sqrt{x^2 + y^2}$

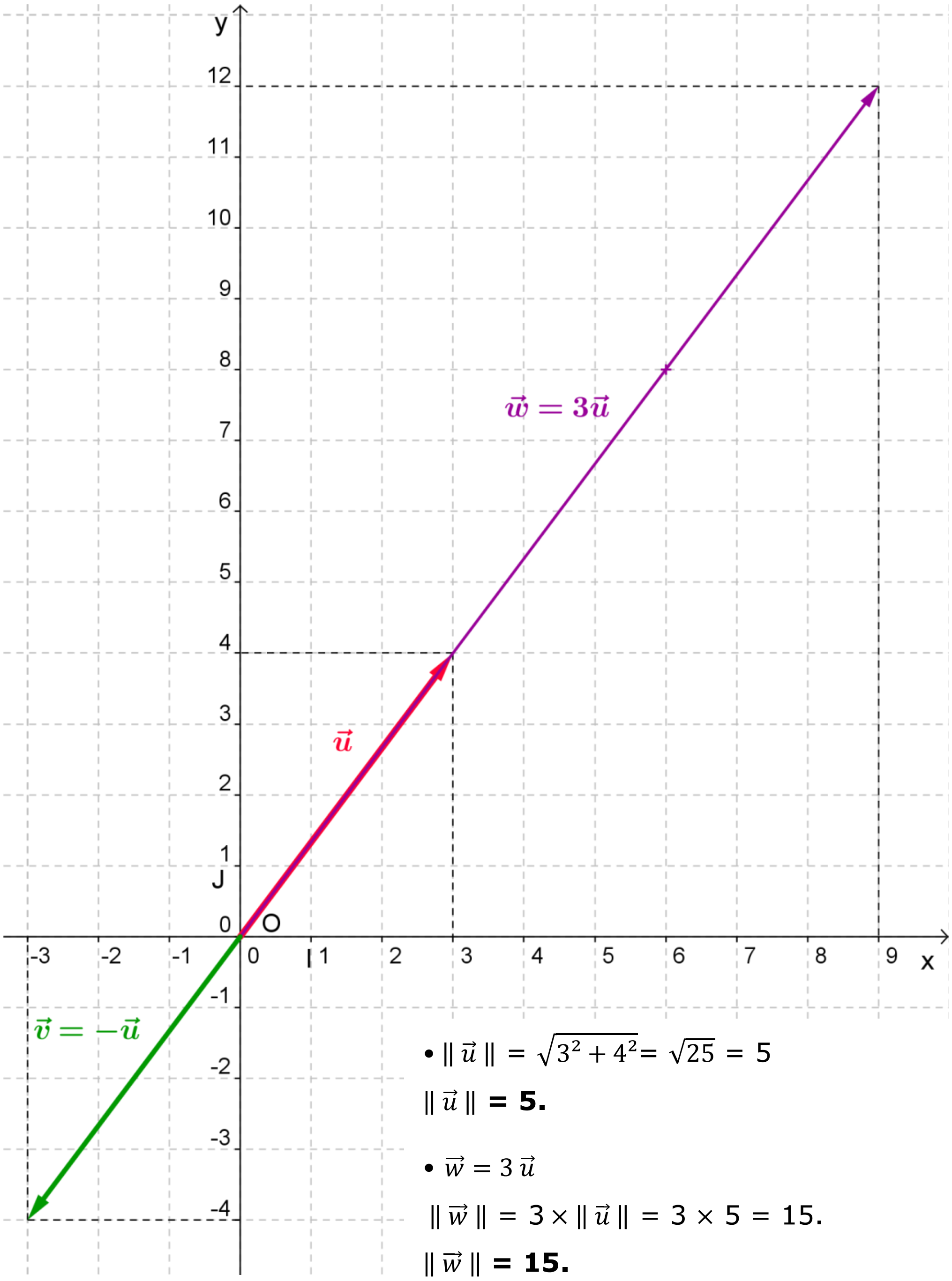


● Pour tout réel λ, le vecteur $\lambda\,\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x\ ;\ \lambda y)$.

De ce fait :

$$\|\lambda\,\vec{u}\,\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{(\lambda^2(x^2+y^2)} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{x^2+y^2} = |\lambda| \times \sqrt{x^2+y^2} = |\lambda| \times \|\,\vec{u}\,\|$$

<u>Exemple:</u>



• $\|\,\vec{u}\,\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\|\,\vec{u}\,\|$ **= 5.**

• $\vec{w} = 3\,\vec{u}$

$\|\,\vec{w}\,\| = 3 \times \|\,\vec{u}\,\| = 3 \times 5 = 15.$

$\|\,\vec{w}\,\|$ **= 15.**

• $\vec{v} = -\,\vec{u}$

$\|\,\vec{v}\,\| = 1 \times \|\,\vec{u}\,\| = 1 \times 5 = 5.$

$\|\,\vec{v}\,\|$ **= 5.**

II) Définition du produit scalaire :

1) Définition:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » définie par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarques:

- **Par convention: $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$**

Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

- **Lorsque $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ on obtient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$**

2) Propriété 1:

Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x';\ y')$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Exemples: Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(-2;\ 5)$ et $(3;\ 1)$. Calculons leur produit scalaire.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times 3 + 5 \times 1$ = -6 + 5 = -1

On obtient donc :

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ = -1

Démonstration:

Par définition : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Comme les coordonnées des vecteurs sont :

$\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ $\quad$ $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$ $\quad$ $\vec{v} + \vec{u}\ (x' + x\ ;\ y' + y)$

leurs normes sont :

$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$

$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = (x' + x)^2 + (y' + y)^2$

donc :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$= \frac{1}{2}[(x' + x)^2 + (y' + y)^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)$

$= \frac{1}{2}[x'^2 + 2xx' + x^2 + y'^2 + 2y'y + y^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2]$

$= \frac{1}{2}[2xx' + 2y'y]$

$= xx' + y'y$

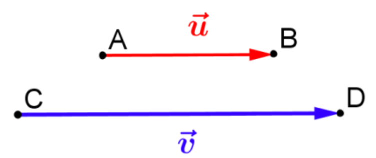
On a donc bien la formule :

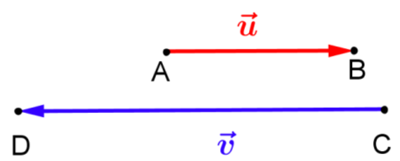
$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + y'y$

3) Propriété 2:

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls , le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aussi obtenu par la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

Remarques:





• Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, dans ce cas $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et nous obtenons donc: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$

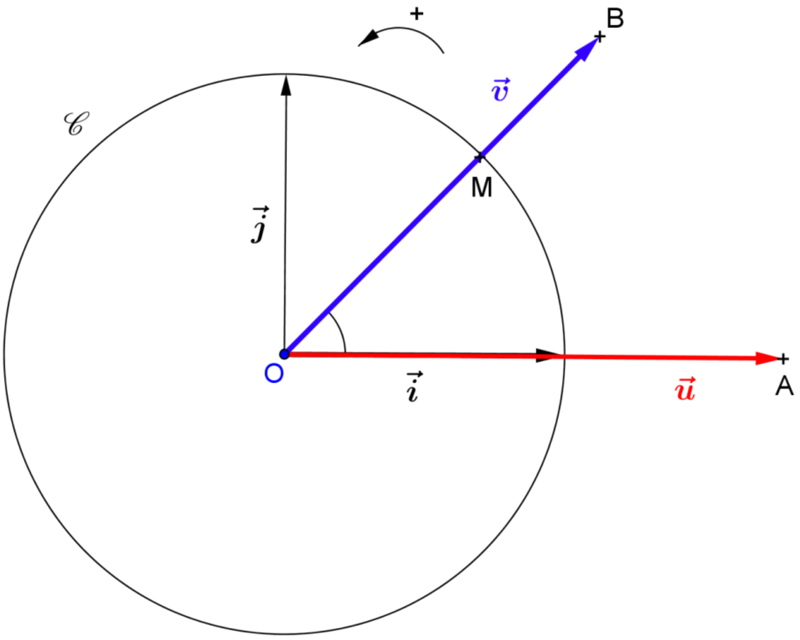
Ou: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

• Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ dans ce cas $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ et nous obtenons donc: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

Ou: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Démonstration:

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est un repère orthonormé tel que $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens. La demi-droite [OB) coupe le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O en un point M.



$\vec{u}$. $\vec{v}$ = $\overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OB}$.

Dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$):

$\overrightarrow{OA}$ (OA ; 0) et $\overrightarrow{OB}$ (OB cos($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}$) ; OB sin($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}$))

Comme ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}$) = ($\vec{u}$, $\vec{v}$) alors : **$\overrightarrow{OB}$ (OB cos($\vec{u}$, $\vec{v}$) ; OB sin($\vec{u}$, $\vec{v}$))**

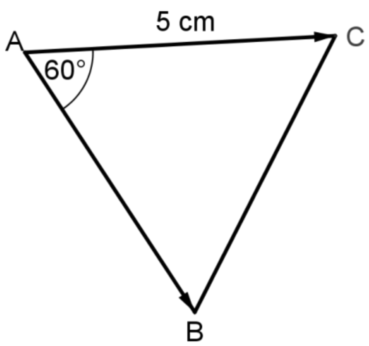
En utilisant la propriété 1, on obtient: **$\vec{u}$. $\vec{v}$ = OA** × **OB $\cos$**($\vec{u}$, $\vec{v}$)

OA = $\|\vec{u}\|$ et OB = $\|\vec{v}\|$

Donc: $\vec{u}$. $\vec{v}$ = $\|\vec{u}\|$ × $\|\vec{v}\|$ × cos($\vec{u}$, $\vec{v}$)

Exemples:

a) ABC est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est de 5 cm.
Calculer $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60°)$$
$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC$$
$$= \frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{25}{2}$$

$\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AC}$ = 12,5

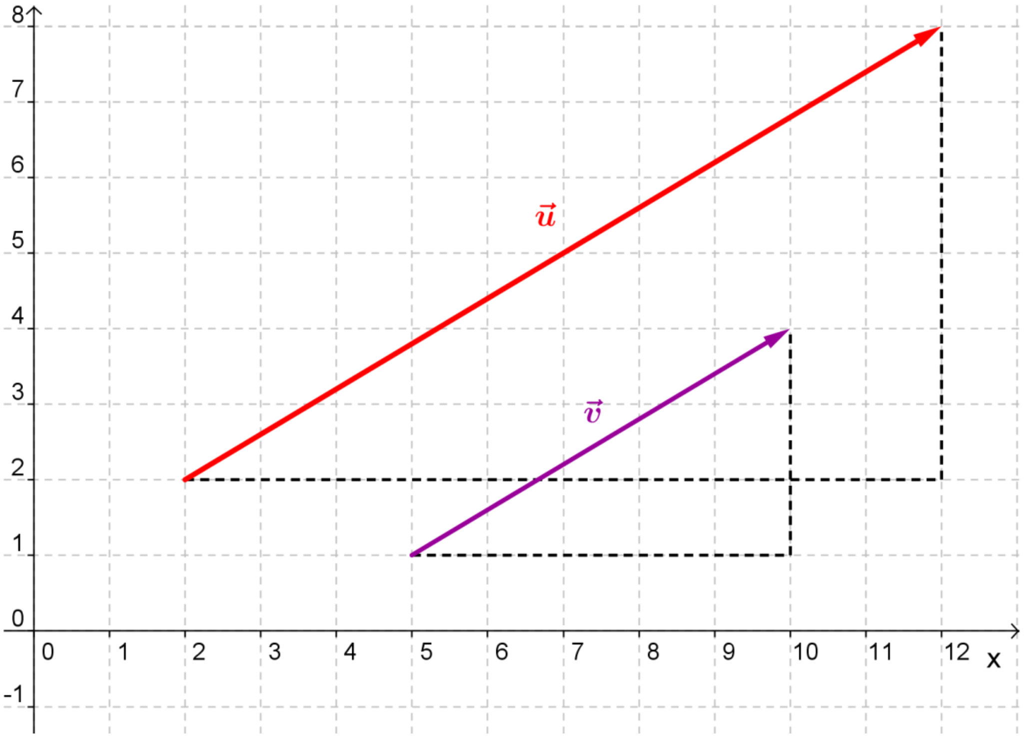
b) Plus généralement, si ABC est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est de a cm alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ = AB × AC × cos(60°) $= \frac{1}{2} \times a \times a$

$= \frac{1}{2} \times a^2$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}}$

c) Déterminer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tracés ci-dessous :



Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont : $\vec{u}$ (5 ; 3)
Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont : $\vec{v}$ (10 ; 6)

$\| \vec{u} \|^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ $\| \vec{u} \| = \sqrt{34}$

$\| \vec{v} \|^2 = 10^2 + 6^2$ = 100 + 36 = 136 $\| \vec{v} \| = \sqrt{136}$

$\vec{v} = 2 \times \vec{u}$ **Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens**

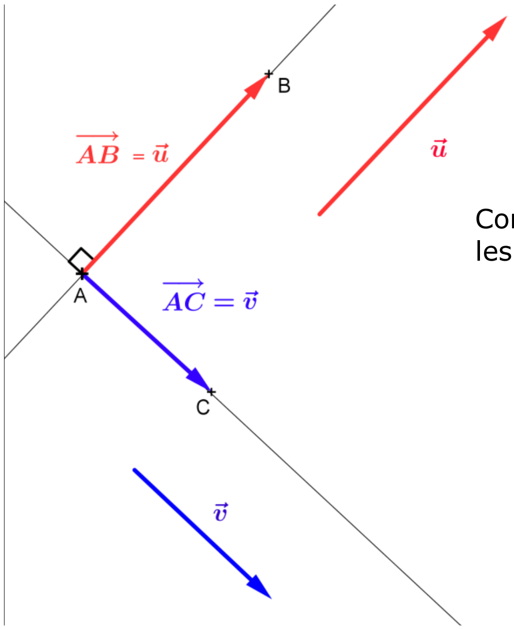
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ **=** $\sqrt{34} \times \sqrt{136}$ **=** $\sqrt{4624}$ **= 68.**

III) Produit scalaire et orthogonalité :

1) Définition de deux vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Comme les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Remarque: Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

2) Théorème :

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

• Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Démonstration:

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est immédiat.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

Or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

$\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$ équivaut à $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

équivaut à: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux