Propriétés de calcul du produit scalaire

Projeté orthogonal

I) Propriétés de calculs

1) Définition

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ est le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même. On utilise une notation analogue à celle des nombres réels:

$\vec{u} \,.\, \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$

Remarques:

• **Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul on a :** $\vec{u}.\vec{u}$ **=** $\|\vec{u}\|^2$

En effet, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u},\vec{u})$ Or $\cos(\vec{u},\vec{u}) = 1$

D'où : $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

• Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$, on a les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Exemples:

• Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}$ (2; 3)

$\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ donc $\vec{u}^2$ **= 13**

• Dans un repère orthonormé, les points A et B ont pour coordonnées:

A(-2 ; 5) et B(4 ; -3) $\overrightarrow{AB}$ $(4 - (-2) \,;\, -3 - 5)$

$\overrightarrow{AB}$ $(6 \,;\, -8)$ $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 6^2 + (-8)^2 = 36 + 64 = 100$

$AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 100$

2) Propriétés:

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout nombre réel λ ,

• $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

• $\vec{u} \,.\, (\lambda\,\vec{v}) = \lambda\,(\vec{u} \,.\, \vec{v}) = (\lambda\,\vec{u}) \,.\, \vec{v}$

Démonstration:

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x\,;y)$; $\vec{v}(x'\,;y')$; $\vec{w}(x"\,;\,y")$ et $\lambda\,\vec{v}\,(\lambda x';\,\lambda y')$

- $\vec{u}+\vec{v} = (x+x';\,y+y')$

$(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = (x+x')\,x" + (y+y')\,y" = \underbrace{x\,x" + yy"} + \underbrace{x'x" + y'y"}$

$= \quad \vec{u}.\vec{w} \quad + \quad \vec{v}.\vec{w}$

Donc $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

- $\vec{u}\,.\,(\lambda\ \vec{v}\,) = x\times\lambda x' + y\times\lambda y' = \lambda\times(\underbrace{xx' + yy'}) = \underbrace{\lambda\times x}\,x' + \underbrace{\lambda\times y}\,y'$

$= \lambda \quad (\vec{u}\,.\,\vec{v}\,) \quad = \quad (\,\lambda\,\vec{u}\,)\,.\,\vec{v}$

Donc $\vec{u}\,.\,(\lambda\ \vec{v}\,) = \lambda(\vec{u}\,.\,\vec{v}\,) = \lambda\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$

Exemple :

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ (2 ; 5) et $\vec{v}$ (4 ;-2)

Calculons $(4\vec{u}\ -3\vec{v}\,).(\vec{u}\ +2\,\vec{v})$

$(4\vec{u}\ -3\vec{v}\,).(\vec{u}\ +2\,\vec{v}) = 4\vec{u}^2 + 8\vec{u}.\vec{v} - 3\,\vec{v}.\vec{u} - 6\,\vec{v}^2$

$(4\vec{u}\ -3\vec{v}\,).(\vec{u}\ +2\,\vec{v}) = 4\vec{u}^2 + 5\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}^2$

Or $\vec{u}^2 = 29$ $\quad \vec{v}^2 = 20$ $\quad$ et $\quad \vec{u}.\vec{v} = 8 - 10 = -2$

Donc $4\vec{u}^2 + 5\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{v}^2 = 4\times 29 + 5\times(-2) - 6\times 20 = -14$

On obtient :

$\boldsymbol{(4\vec{u}\ -3\vec{v}\,).(\vec{u}\ +2\,\vec{v}) = -14}$

II) Identités remarquables :

1) Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

2) Démonstration:

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).\,(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \underbrace{\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u}} + \vec{v}.\vec{v}$$

$$= \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).\,(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \underbrace{\vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u}}. + \vec{v}.\vec{v} =$$

$$= \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v}).\,(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} \underbrace{- \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u}}. - \vec{v}.\vec{v}$$

$$= \vec{u}^2 + \vec{0} - \vec{v}^2$$

$$= \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

3) Exemples

Exemple 1: Calculer $(\vec{u}+\vec{v})^2$ avec $\vec{u}$ (-1 ; 3) et $\vec{v}$ (2 ; 4)

$\vec{u}^2 = (-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$

$\vec{u}.\vec{v} = -2 + 12 = 10$

$\vec{v}^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

On obtient donc : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = 10 + 2\times 10 + 20 = 50$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = 50$

Exemple 2: Calculer $(\vec{u} - \vec{v})^2$ avec $\vec{u}$ (2 ; 5) et $\vec{v}$ (3 ; 6)

$\vec{u}^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

$\vec{u}.\vec{v} = 6 + 30 = 36$

$\vec{v}^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

On obtient donc : $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 29 - 2\times 36 + 45 = 2$

$\boldsymbol{(\vec{u} - \vec{v})^2 = 2}$

Exemple 3: Calculer $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$ avec $\vec{u}$ (-3 ; 7) et $\vec{v}$ (5 ; 2)

$\vec{u}^2 = (-3)^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

$\vec{v}^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$

On obtient donc : $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 58 - 29 = 29$

$\boldsymbol{(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 29}$

Exemple 4: Calculer $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$ avec $\vec{u}$ (-2 ; 3) et $\vec{v}$ (1 ; 4)

$\vec{u}^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

$\vec{u}.\vec{v} = -2 + 12 = 10$

$\vec{v}^2 = 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$

$(3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 9\vec{u}^2 - 12\vec{u}.\vec{v} + 4\vec{v}^2 = 65$

On obtient donc :

$\boldsymbol{(3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 65}$

Exemple 5: Calculer $(4\vec{u} - 5\vec{v})\ (4\vec{u} + 5\vec{v})$ avec $\vec{u}$ (5 ; -3) et $\vec{v}$ (2 ; 5)

$\vec{u}^2 = (5)^2 + (-3)^2 = 25 + 9 = 34$

$\vec{v}^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

$(4\vec{u} - 5\vec{v})\ (4\vec{u} + 5\vec{v}) = 16\vec{u}^2 - 25\vec{v}^2$

On obtient donc :

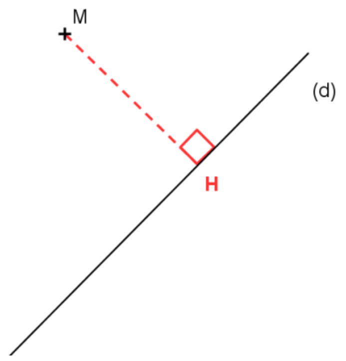
$\boldsymbol{(4\vec{u} - 5\vec{v})\ (4\vec{u} + 5\vec{v}) = -181}$

III) Projection orthogonale et produit scalaire:

1) Définition:

(d) est une droite et M un point du plan.

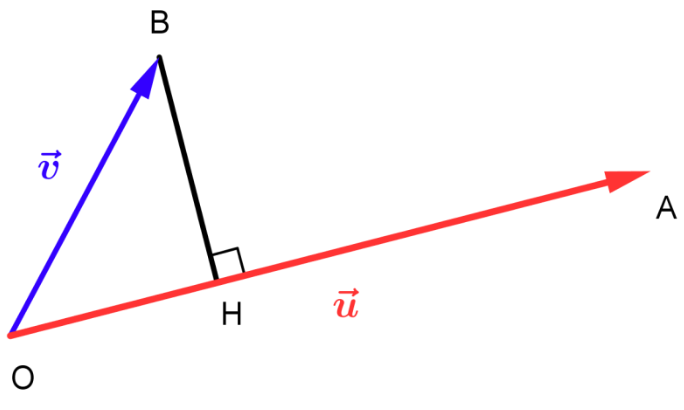
Le projeté orthogonal de M sur la droite (d) est le point H intersection de la perpendiculaire à (d) passant par le point M et de (d).



2) Propriété

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .



Démonstration:

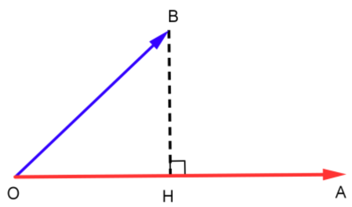
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ En utilisant la relation de Chasles on obtient :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$ or $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ car (OA) ⊥ (BH)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

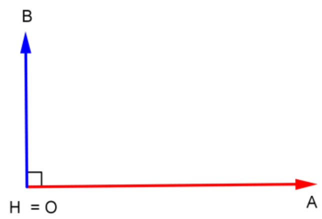
Remarques :

L'angle $\widehat{AOB}$ est aigu



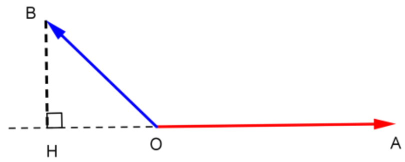
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OH$

L'angle $\widehat{AOB}$ est droit



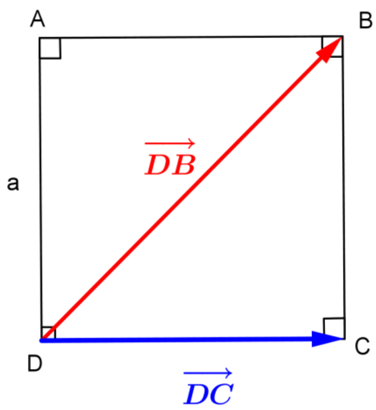
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

L'angle $\widehat{AOB}$ est obtus



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Exemple :



ABCD est un carré dont la longueur des côtés est a cm. Le projeté orthogonal de B sur la droite (DC) est le point C.
Donc $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}^2 = a^2$