Comportements d'une suite, problèmes

I) Sens de variation d'une suite numérique.

1) Définitions :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$, une suite numérique. On dit que cette suite est :

- **croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$;**
- **strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$;**
- **décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$;**
- **strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.**

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, est monotone si elle est croissante ou décroissante

Remarque : pour connaître le sens de variation d'une suite, on compare donc deux termes consécutifs de la suite. On doit faire cela pour tous les termes de la suite.

2) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Selon l'expression de la suite (u_n) :

- **Méthode 1 : On calculera l'expression $u_{n+1} - u_n$ et on étudiera son signe :**

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite u est croissante

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite u est décroissante

En Effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

- **Méthode 2 : Dans le cas où $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonctions f sur [0 ; +∞ [**

Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur [0 ; + ∞ [

Si la fonction f est croissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est croissante aussi

Si la fonction f est décroissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est décroissante aussi

En effet , pour tout entier naturel n, $n < n + 1$, si f est croissante alors $f(n) < f(n+1)$

si f est décroissante alors $f(n) > f(n+1)$

Remarque: On peut aussi, sous certaines conditions, calculer l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare cette expression à 1:

Tout d'abord, il faut prouver que tous les termes de la suite u sont positifs

Puis, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

- Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante
- Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est décroissante

En Effet, Si tous les termes de la suite u sont positifs, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

3) Exemples

Exemple 1: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = 3n+1$ on a donc :

$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n+4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3n+4-3n-1 = 3$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et $u_0 = 2$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times u_n}{u_n} = 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ **> 1** ,

Comme tous les u_n sont positifs car $u_0 = 2$

on a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 3: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $u_n = f(n)$.Pour tout entier naturel $\mathbb{N}$ non nul ,

f est strictement décroissante sur]0 ; +∞ [, comme $n < n + 1$ alors pour tout

$n > 0$, $f(n) > f(n+1)$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Exemple 4: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = n^2 - 1$

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n - n^2 + 1 = 2n + 1$

Pour $n \geq 0$ $2n + 1 > 0$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 5: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x + 4$

avec $u_0 = 2$

$u_1 = u_0 + 4 = 2 + 4 = 6$

$u_2 = u_1 + 4 = 6 + 4 = 10$

$u_3 = u_2 + 4 = 10 + 4 = 14$

$u_{n+1} - u_n = u_n + 4 - u_n = 4 > 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante

Exemple 6

a) Considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_n = f(n)$.
Pour n entier naturel, formons la différence
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (n^2 - 3n + 1) = 2n - 2$ qui est strictement positif
dès que $n \neq 0$ ou $n \neq 1$. Donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

L'étude des premiers termes faite ci-dessus montre que $(u_n)_{n\geq 1}$ **est croissante non strictement et que $(u_n)_{\geq 0}$ n'est pas monotone mais l'est pour $(u_n)_{n\geq 2}$.**

b) Considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Pour n entier naturel, formons la différence
$u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 - 3u_n + 1 - u_n = {u_n}^2 - 4u_n + 1 = (u_n - 2)^2 - 3$
$= (u_n - 2 + \sqrt{3})(u_n - 2 - \sqrt{3})$

Donc $u_{n+1} - u_n$ est positif pour des valeurs de u_n inférieures à $2-\sqrt{3}$ ou supérieures à $2+\sqrt{3}$.

Nous avons vu que $u_2 = 5 > 2+\sqrt{3}$. D'après le calcul précédent, nous savons que $u_3 - u_2$ est strictement positif, donc u_3 est plus grand que u_2 , donc que 5. Donc u_4 est plus grand que u_3 … et ainsi de suite. **Donc la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.**

On ne peut pas en dire autant de $(u_n)_{\geq 0}$. En effet, on constate que les premiers termes sont 1 puis -1 . Cette suite est donc d'abord décroissante, puis croissante. On ne peut pas affirmer que $(u_n)_{\geq 1}$ est strictement croissante.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante mais $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas monotone.

II) Etude du comportement des suites à l'infini

Exemple 1 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = 2n+1$

Etudions le comportement de cette suite lorsque n prends des valeurs de plus en plus grande.

$\boldsymbol{n}$	5	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\boldsymbol{u_n}$	11	21	201	2 001	20 001	200 001	2 000 001

$u_n > 10$ pour n > 5

$u_n > 200$ pour n > 100

$u_n > 200\,000$ pour n > 100 000

Plus généralement, on peut démontrer que pour tout nombre A aussi grand que l'on veut ,il existe un nombre N, où à partir de ce rang $\boldsymbol{u_n}$ est plus grand que A.

Pour traduire cette notion on dit que la suite $\boldsymbol{u}$ a pour limite $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 2 : On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $v_n = 2 + \dfrac{1}{n}$

Etudions le comportement de cette suite lorsque n prends des valeurs de plus en plus grande.

$\boldsymbol{n}$	5	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\boldsymbol{v_n}$	2,2	2,1	2,01	2, 001	2,0001	2,00001	2,000 001

$1{,}7 < v_n < 2{,}3$ pour n > 5

$1{,}9999 < v_n < 2{,}0001$ pour n > 1 000

$1{,}999\,999 < v_n < 2{,}000\,001$ pour n > 1 000 000

On remarque que plus n est grand plus v se rapproche de 2

Plus généralement, on peut démontrer que pour tout nombre réel $\boldsymbol{\alpha}$ strictement positif, aussi proche de 0 que l'on veut ,il existe un rang N où , à partir de rang $\boldsymbol{v_n}$ appartient à l'intervalle : $]2-\alpha\ ;\ 2+\alpha[$

Pour traduire cette notion on dit que la suite $\boldsymbol{v}$ a pour limite 2 et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$$

Exemple 3 : On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $w_n = (-1)^n$

Etudions le comportement de cette suite lorsque n prends des valeurs de plus en plus grande.

n	5	10	101	1 000	10 003	100 000	1 000 001	100 000 000
w_n	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Cette suite ne peut pas avoir de limite ni finie ni infinie, les valeurs de $\boldsymbol{u}$ oscillent entre 1 et -1.

III) Exemples de problèmes

Problème 1 :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = {u_n}^2$ et $u_0 = 0{,}75$

1. Soit f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Faire la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 1[puis construire les points :

A_0 $(u_0 \; ; f(u_0))$; A_1 $(u_1 \; ; f(u_1))$; A_2 $(u_2 \; ; f(u_2))$; A_3 $(u_3 \; ; f(u_3))$; A_4 $(u_4 \; ; f(u_4))$

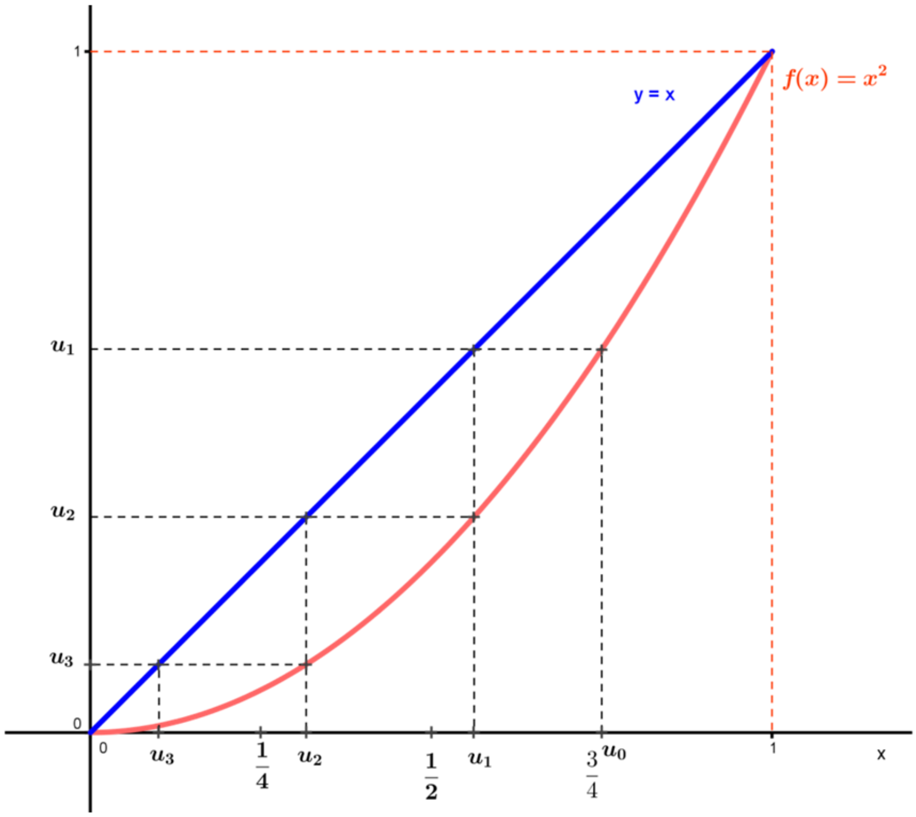
2. Conjecturez le sens de variation de la suite.

3. Justifier que si x appartient à]0 ; 1[alors $f(x)$ appartient aussi à cet intervalle.

4. Prouver la conjecture faite au 2.

5. Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, Quel semble être le comportement de la suite u ?

Réponse:
1.



2. La suite semble être décroissante

3.si $0 < x < 1$ alors $0 < \boldsymbol{x^2} < \boldsymbol{x} < 1$ donc $0 < f(x) < 1$

4.Nous venons de montrer que si $0 < x < 1$ alors $0 < f(x) < 1$ donc

Pour chaque entier naturel n , $0 < u_n < 1$ entraine $0 < \boldsymbol{u_n}^2 < \boldsymbol{u_n} < 1$

Ce qui veut dire que : si $0 < u_n < 1$ cela entraine $0 < \boldsymbol{u_{n+1}} < \boldsymbol{u_n} < 1$

La suite u est donc décroissante.

5. Graphiquement on voit que plus **n est grand, plus u_n se rapproche de 0**

D'ailleurs si on calcule les 10 premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur on voit que

$u_5 \approx 0001$ $\quad u_9 \approx 1\times\ 10^{-64}$ qui se rapproche de 0.

u_n semble tendre vers 0 lorsque n tend vers + ∞

Problème 2 :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = \sqrt{3n+1}$

1. Faire une figure puis placez les points :

$A_0\ (0\ ;\ u_0\ )$; $A_1\ (1;\ u_1)$; $A_2\ (2\ ;\ u_2\ )$; $A_3\ (3\ ;\ u_3\ )$; $A_4\ (4\ ;\ u_4)$

2. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 0$ et que la suite (u_n) est croissante

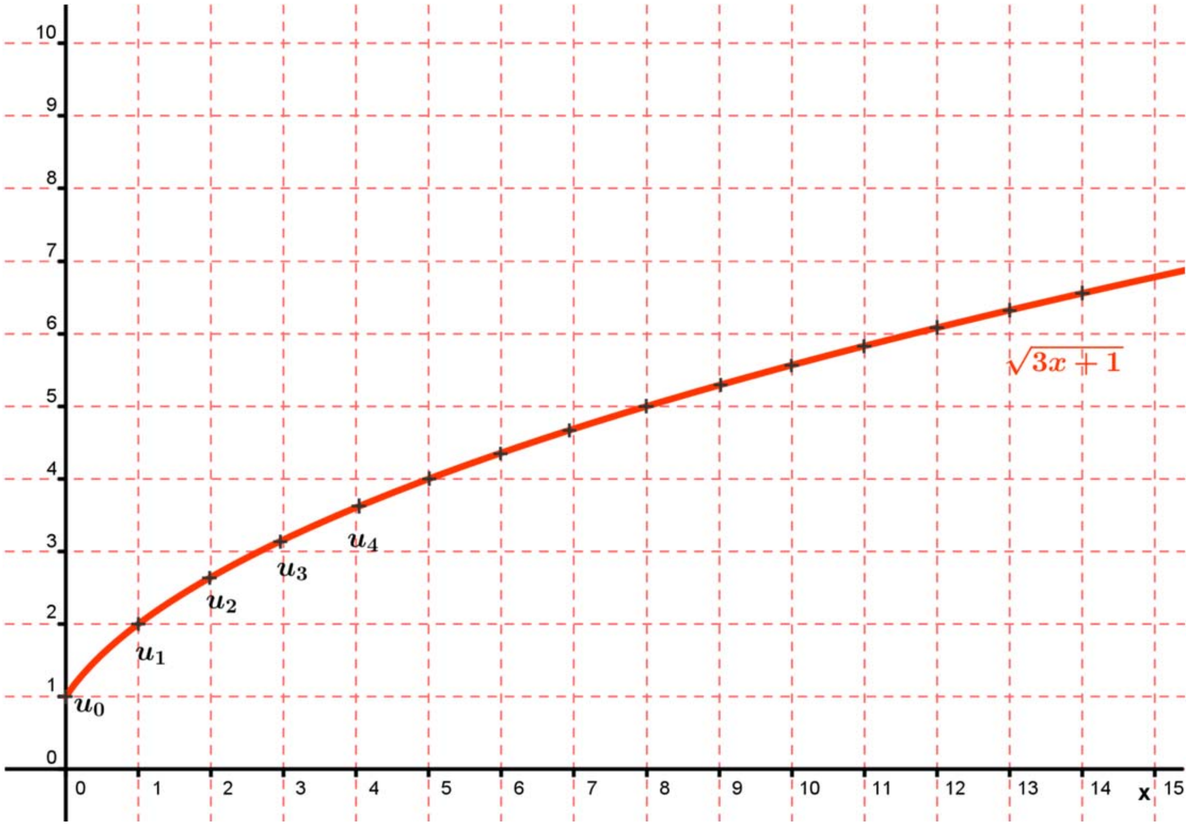
3. A partie de quel entier N , $u_N \geq 10^5$? Puis montrer que pour tout entier n , avec n > N, $u_n \geq\ 10^5$

4. Reprenez la question en remplaçant 10^5 par 10^{10} puis par un nombre A quelconque

5. Quelle semble être la limite de u_n ?

Réponse:

1.



2. Pour tout entier naturel n, $3n + 1 \geq 0$ et $\sqrt{3n+1} \geq 0$. La racine carrée d'un nombre (positif) est toujours positive. (voir cours racine carrée) **donc pour tout entier n, $u_n > 0$.**

De plus $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x+1}$ comme la fonction f est croissante sur [0 ; +∞[, **La suite (u_n) est aussi croissante.**

3. $\sqrt{3n+1} \geq 10^5$ donc $3n+1 \geq (10^5)^2$ $3n+1 \geq 10^{10}$

$3n \geq 10^{10} - 1$ on obtient donc : $n \geq \frac{10^{10}-1}{3}$ c'est-à-dire n ≥ 3 333 333 333

Donc **N = 3 333 333 333 :**

Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geq$ **3 333 333 333** $u_n \geq 10^5$

4.

- $\sqrt{3n+1} \geq 10^8$ donc $3n+1 \geq (10^8)^2$ $3n+1 \geq 10^{16}$

$3n \geq 10^{16} - 1$ on obtient donc : $n \geq \frac{10^{16}-1}{3}$ c'est-à-dire n ≥ 3 333 333 333 333 333

Donc **N = 3 333 333 333 333 333:**

Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geq$ **3 333 333 333 333 333** $u_n \geq 10^8$

- $\sqrt{3n+1} \geq$ A donc $3n+1 \geq A^2$ $3n \geq A^2 - 1$ on obtient donc : $n \geq \frac{A^2-1}{3}$

c'est-à-dire pour : n ≥ $\frac{A^2-1}{3}$

On choisit donc N l'entier supérieur ou égal à $\frac{A^2-1}{3}$
Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geq N$ $u_n \geq$ A

5. pour tout nombre A aussi grand que l'on veut ,il existe un nombre N, où à partir de ce rang u_n est plus grand que A.

On peut donc dire que la suite u a pour limite +∞ et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$