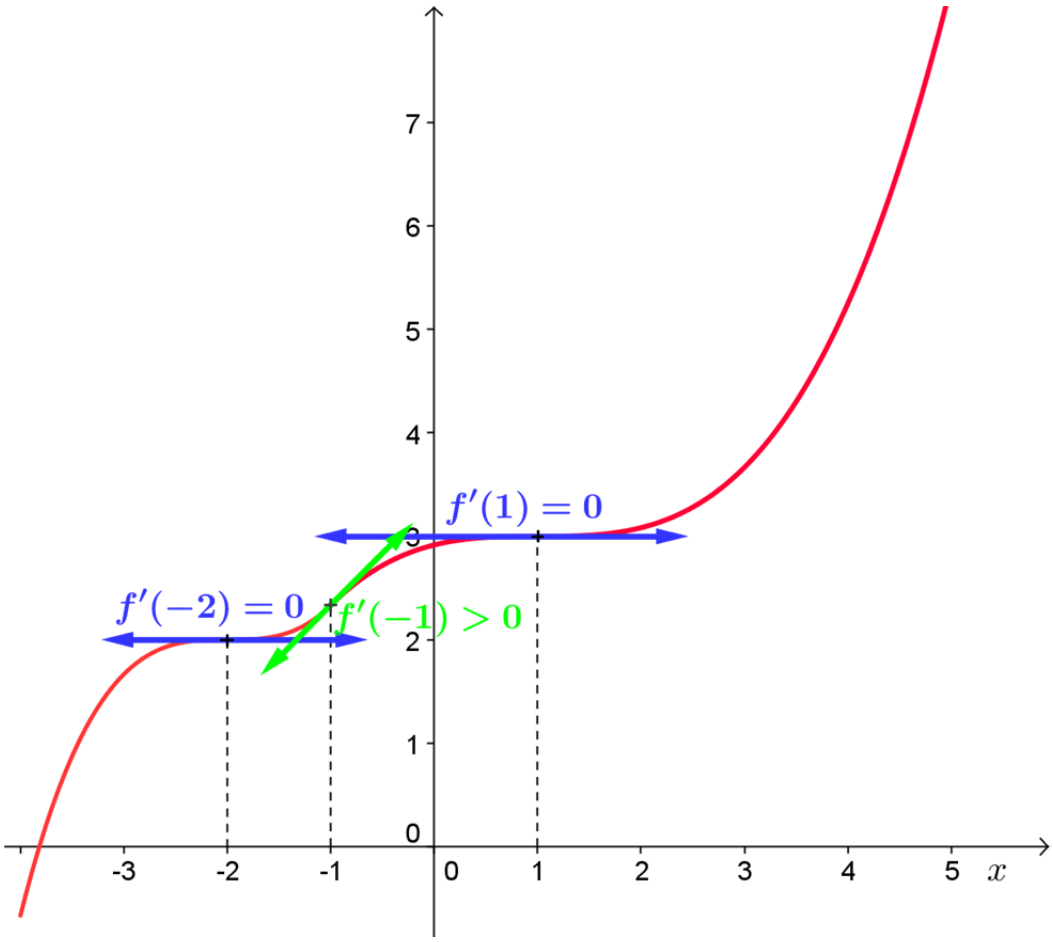
Dérivées et applications. Equation $f(x) = k$

I) Dérivée d'une fonction strictement monotone

1) Exemples graphiques

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout $x \in$ I, f'(x) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

- **Si f est strictement croissante sur I**

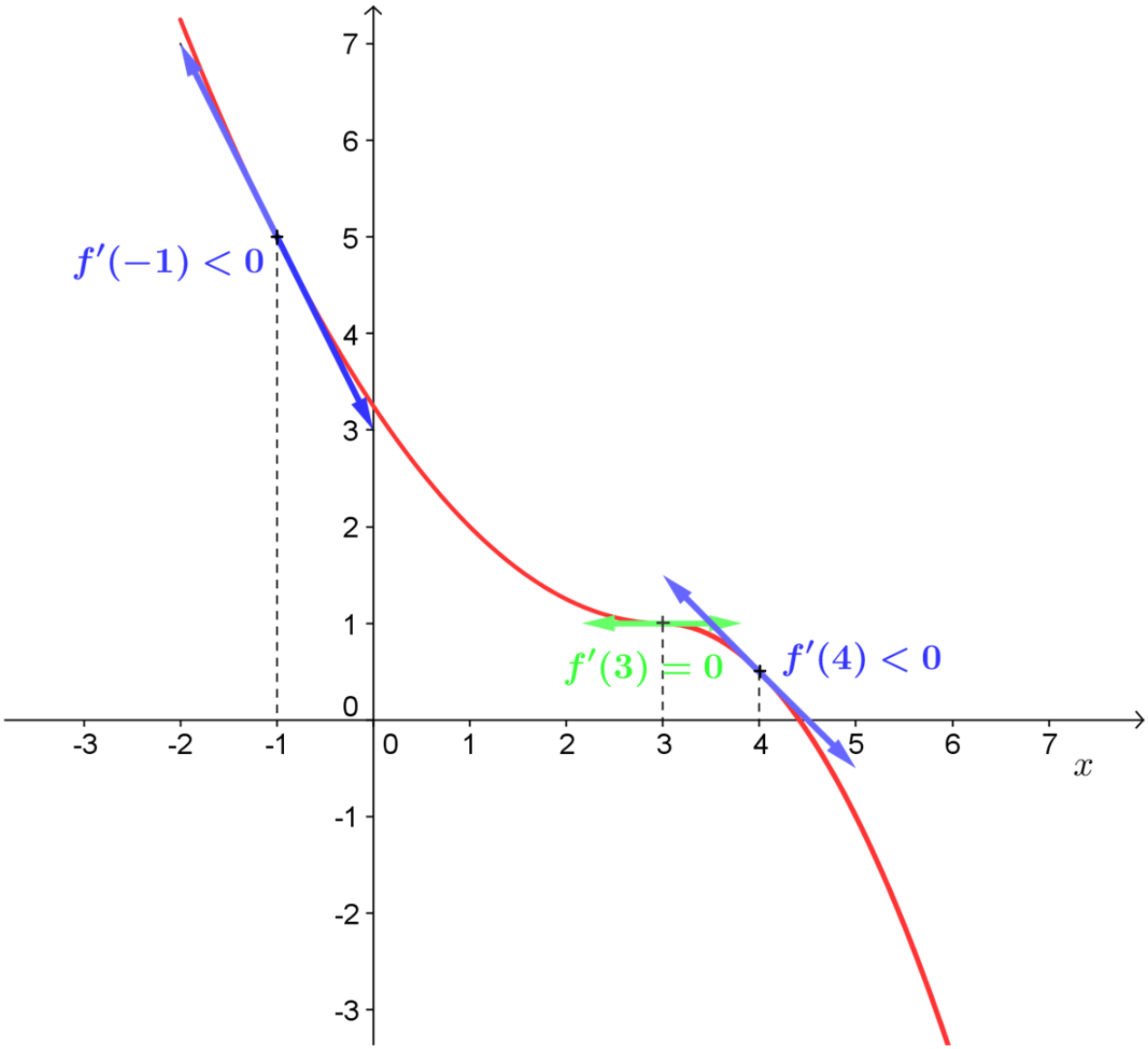


Les tangentes à la courbe ont toutes un coefficient directeur :

- Soit strictement positif
- Soit égal à zéro (dans le cas de tangente horizontale)

On constate graphiquement que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ I

- **Si f est strictement décroissante sur I**



Les tangentes à la courbe ont toutes un coefficient directeur :

- Soit strictement négatif
- Soit égal à zéro (dans ce cas la tangente horizontale)

On constate graphiquement que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ I

2) Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- **Si f est strictement croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$**
- **Si f est strictement décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$**

II) Sens de variation et dérivée

Théorème de stricte monotonie

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- **Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I alors f est constante sur I ;**
- **Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$ I sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s 'annule, alors f est strictement croissante sur I ;**
- **Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$ I sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s 'annule, alors f est strictement décroissante sur I.**

Exemples :

1°) Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

La fonction f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

f' est un trinôme du second degré ayant deux racines 0 et 2 donc son signe s'obtient à l'aide du tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x(x-2)$		+	0	−	0	+	

L'étude du signe de f' montre que :

- $f'(x) > 0$ sur les intervalles]- ∞ ; 0[et]2 ; + ∞[, donc que f est strictement croissante sur ces intervalles.
- $f'(x) < 0$ sur l'intervalle]0 ; 2[, donc que f est strictement décroissante sur cet intervalle.

2°) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ définie et dérivable sur D =] -∞ ; 1[∪] 1 ; +∞[

On a $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 6)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

Le dénominateur étant un carré, il est toujours positif donc sur D, $f'(x)$ possède le même signe que son numérateur qui est un trinôme du second degré possédant deux racines – 1 et 3 dont le signe est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $(x+1)(x-3)$		+	0	−	0	+	

- Sur] - ∞ ; -1 [on a $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle ;
- Sur] -1 ; 1 [on a $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- Sur] 1 ; 3 [on a $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- Sur] 3 ; + ∞ [on a $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

III) Lecture d'un tableau de variation

Convention

Dans un tableau de variation d'une fonction f, une flèche indique :

- **La stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;**
- **L'absence de rupture (ou continuité) de la courbe de f sur cet intervalle.**

Une double barre dans le tableau de variation indique qu'il y a rupture que la fonction n'est pas définie pour une ou des valeurs de x.

Exemples :

1°)

x	-5		1		3		7
Signe de $f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
Variations de f	-1	↗	3	↘	-2	↗	5

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$
- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $[-5\,;\,1]$ et $[3\,;\,7]$
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,3]$
- La courbe est sans rupture sur les intervalles $[-5\,;1]\,;[1\,;3]$ et $[3\,;\,7]$ (on dit aussi que la fonction f est continue sur ces intervalles)
- $f(-5) = -1$; $f(1) = 3$; $f(3) = -2$ et $f(7) = 5$

2°)

x	-7		4		8
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$-$	
Variations de f	2	↗	‖	↘	-5

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble D=$[-7\,;\,4[\cup]4\,;\,8]$
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-7\,;\,4[$
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]4\,;\,8]$

- La courbe possède une rupture pour $x = 4$ mais elle est sans rupture sur les intervalles $[-7\,;\,4[$ et $]4\,;\,8]$

- $f(-7) = 2$; $f(8) = -5$ et le réel 4 n'a pas d'image.

3°)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	–		+	–
Variations de f	↗	↘	**3**	↗	↘

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction f est définie sur l'ensemble D=$]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$
- La fonction f est dérivable sur l'ensemble D privé de 0
- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,-2[$ et $[0\,;2[$
- La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $]-2\,;\,0]$ et $]2\,;\,+\infty[$
- La courbe possède des ruptures pour $x = -2$ et pour $x = 2$ mais elle est sans rupture sur les intervalles $=]-\infty\,;\,-2[\,;\,]-2\,;\,2[$ et $]2\,;\,+\infty[$
- $f(0) = 3$; et les réels – 2 et 2 n'ont pas d'image.

IV) Nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ revient à chercher dans le tableau de variation le nombre de fois où la fonction prend la valeur k.

On peut localiser la (ou les) solution(s) en précisant à quel(s) intervalle(s), $[f(a)\,;\,f(b)]$ contient le nombre k

Exemples :

Exemple 1 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur [-3 ; 3] dont le tableau de variation est le suivant :

x	– 3	0	3
Variations de f	**2** ↘	**0** ↗	**5**

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$? Dans quels intervalles sont-elles situées ?

Réponse :

La fonction f n'est pas monotone sur cet intervalle.

Mais sur [-3 ; 0], la fonction f est strictement décroissante et **1** ∈ **[0 ; 2]**

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution sur l'intervalle [-3 ; 0]

• Sur [0 ; 3], la fonction f est strictement croissante et **1** ∈ **[0 ; 5]**

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution sur l'intervalle [0 ; 3]

Conclusion : L'équation $f(x) = 1$ admet donc deux solutions sur [-3 ; 3].

La première solution est située dans l'intervalle [0 ; 2] et la deuxième dans l'intervalle [0 ; 5].

Exemple 2 : f une fonction définie et dérivable sur [0 ;5] dont voici le tableau de variation :

x	0		1		3		5
Variations de f	**1**	↗	**2**	↘	**-1**	↗	**1**

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$? Dans quels intervalles sont-elles situées ?

Réponse :

• Sur l'intervalle [0 ; 1], la fonction f est strictement croissante mais 0 ∉ [1 ; 2]
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

• Sur l'intervalle [1 ; 3], la fonction f est strictement décroissante et 0 ∈ [-1 ; 2]
L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution sur l'intervalle [1 ; 3]

• Sur l'intervalle [3 ; 5], la fonction f est strictement croissante et 0 ∈ [-1 ; 1]
L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution sur l'intervalle [3 ; 5]

Conclusion :

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur l'intervalle [0 ; 5].

La première solution est située dans l'intervalle [1 ; 3] et la deuxième dans l'intervalle [3 ; 5].