Dérivées des fonctions usuelles

I) Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in$ D

Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \to f'(a)$

II) Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f :	*Dérivable sur :*	*Fonction dérivée f' :*
$f(x) = k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in N)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -a \sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a \cos(ax+b)$

III) Dérivées et opérations

1) Somme de deux fonctions

La fonction $u+v$ définie par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x + x^4$ sur $\mathbb{R}$

On obtient $f'(x) = 1 + 4x^3$

2°) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - 3$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x$

3°) $f(x) = \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$

On obtient $f'(x) = -\sin x + \cos x$

2) Produit d'une fonction par un réel

La fonction λu définie par $(k\,u)(x) = k\,u(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(k\,u)'(x) = k\,u'(x)$.

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 7x^3$ sur $\mathbb{R}$

On obtient $f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$

2°) $f(x) = \frac{4}{x}$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

3°) $f(x) = \mathbf{3}\cos x - 5\sin x$ sur $\mathbb{R}$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = -3\sin x - 5\cos x}$

3) Produit de deux fonctions

La fonction uv définie par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x^2 \cos x$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos x$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin x$

On obtient $f'(x) = 2x\cos x + x^2(-\sin x)$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x}$

2°) $f(x) = x^2 \cos x$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos x$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin x$

On obtient $f'(x) = 2x\cos x + x^2(-\sin x)$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x}$

4 Inverse d'une fonction

La fonction $\frac{1}{v}$ définie par $(\frac{1}{v})(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé des réels où $v(x) = 0$ (D $\cap$ { x I $v(x) \neq 0$ }) et sa dérivée est définie par:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \frac{1}{x^2+7}$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^2 + 7$ on a $u'(x) = 2x$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+7)^2}}$

2°) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi , \in \mathbb{Z}\}$

En posant $u(x) = \sin x$ on a $u'(x) = \cos x$

On obtient $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{sin^2 x}$

5) Quotient de deux fonctions

La fonction $\frac{u}{v}$ définie par $(\frac{u}{v})(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé des réels où $v(x) = 0$ (D $\cap$ { x / $v(x) \neq 0$ }) et sa dérivée est définie par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x-3}$ sur] -∞ ; $\frac{3}{5}$ [∪] $\frac{3}{5}$; + ∞ [

En posant $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 5x - 3$ on a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

On obtient $f'(x) = \dfrac{3(5x-3)-5(3x+1)}{(5x-3)^2} = \dfrac{\mathbf{-14}}{\mathbf{(5x-3)^2}}$

2°) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, \in \mathbb{Z}\}$

En posant $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$ on a $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$

On obtient $f'(x) = \dfrac{cos^2 x - (-sin^2 x)}{cos^2 x} = \dfrac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \dfrac{1}{cos^2 x}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}}$$

6) Tableau récapitulatif

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	***Dérivable sur***	***Dérivée***
$\boldsymbol{u + v}$	D	$\boldsymbol{u' + v'}$
$\boldsymbol{\lambda u}$	D	$\boldsymbol{\lambda u'}$
$\boldsymbol{uv}$	D	$\boldsymbol{u'v + uv'}$
$\boldsymbol{\frac{1}{v}}$	D $\cap$ $\{\boldsymbol{x}$ / $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$	$\boldsymbol{-\frac{u'}{u^2}}$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	D $\cap$ $\{\boldsymbol{x}$ / $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$	$\boldsymbol{\frac{u'v - uv'}{v^2}}$