

Nombre dérivé et tangente

I) Interprétation graphique

1) Taux de variation d'une fonction en un point.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a , soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle A et B les points de (C) d'abscisses respectives a et $a + h$ (h étant un réel non nul positif ou négatif).

Ainsi on a $A (a ; f(a))$ et $B (a + h ; f(a + h))$

La droite (AB) a pour coefficient directeur $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ($h \neq 0$)

Ce nombre m est appelé **taux de variation** de la fonction f en a

Remarque : La droite (AB) est quelquefois appelée *corde* à la courbe (C) en A

Exemples :

1°) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)^2$

La courbe de f est représentée sur la figure ci-contre, avec $a = 1,5$.

Ainsi :

$$f(a) = f(1,5) = 0,25 \text{ et soit } h \neq 0$$

$$f(a+h) = f(1,5+h) = (h+0,5)^2$$

De là le taux de variation de f en $1,5$ vaut :

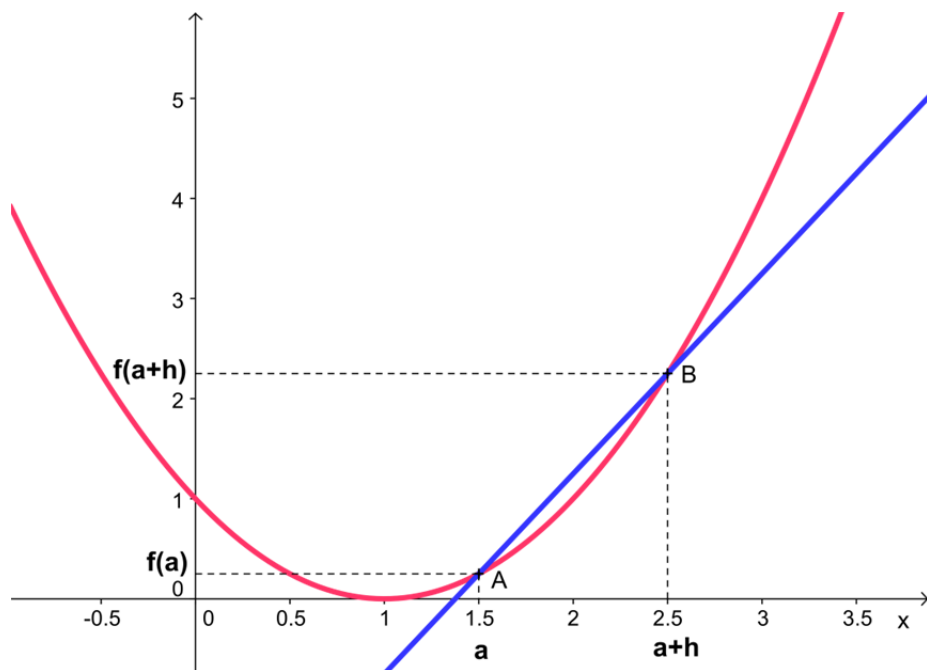
$$m = \frac{(h+0,5)^2 - 0,25}{h} =$$

$$\frac{h^2 + h + 0,25 - 0,25}{h}$$

$$m = \frac{h^2 + h}{h}$$

$$m = \frac{h(h+1)}{h} \text{ comme } h \neq 0 \text{ alors}$$

$$m = h + 1$$



2°) Soit f la fonction définie sur $I =] 2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-4}$

La courbe de f est représentée sur la figure ci-contre, avec $a = 4$.

Ainsi

$$f(a) = f(4) = \frac{1}{4} \text{ et soit } h \neq 0$$

$$f(a+h) = f(4+h) = \frac{1}{2(4+h)-4}$$

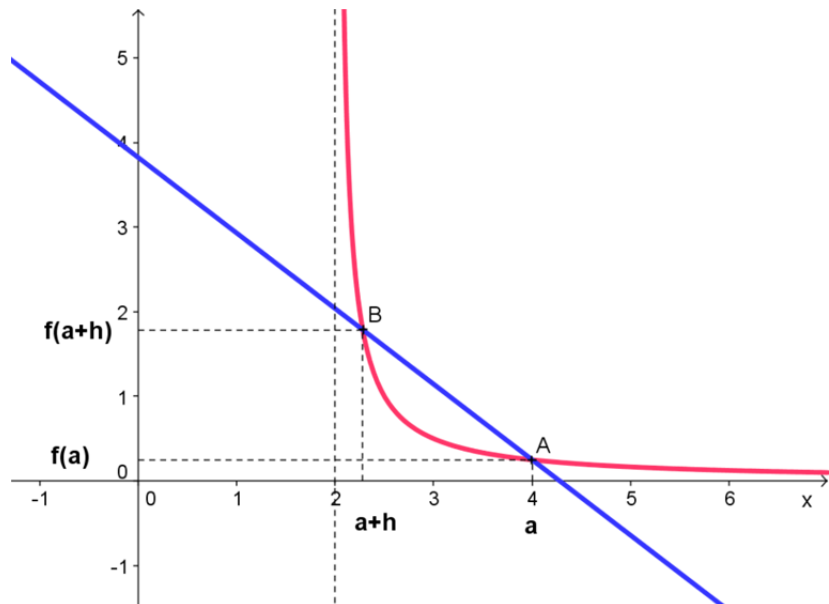
$$f(a+h) = \frac{1}{2h+4}$$

Remarque : sur la figure on a choisi h négatif, mais on doit choisir $h > -2$ pour que $a+h$ appartienne à I

De là le taux de variation de f en 2 vaut :

$$m = \frac{\frac{1}{2h+4} - \frac{1}{4}}{h} = \frac{4 - (2h+4)}{4(2h+4)}$$

$$m = \frac{-2h}{4(2h+4)} = \frac{-2}{4(2h+4)}$$



2) Tangente et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a , soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle A et B les points de (C) d'abscisses respectives a et $a+h$ (h étant un réel non nul positif ou négatif).

Soit m le taux de variation de f en a .

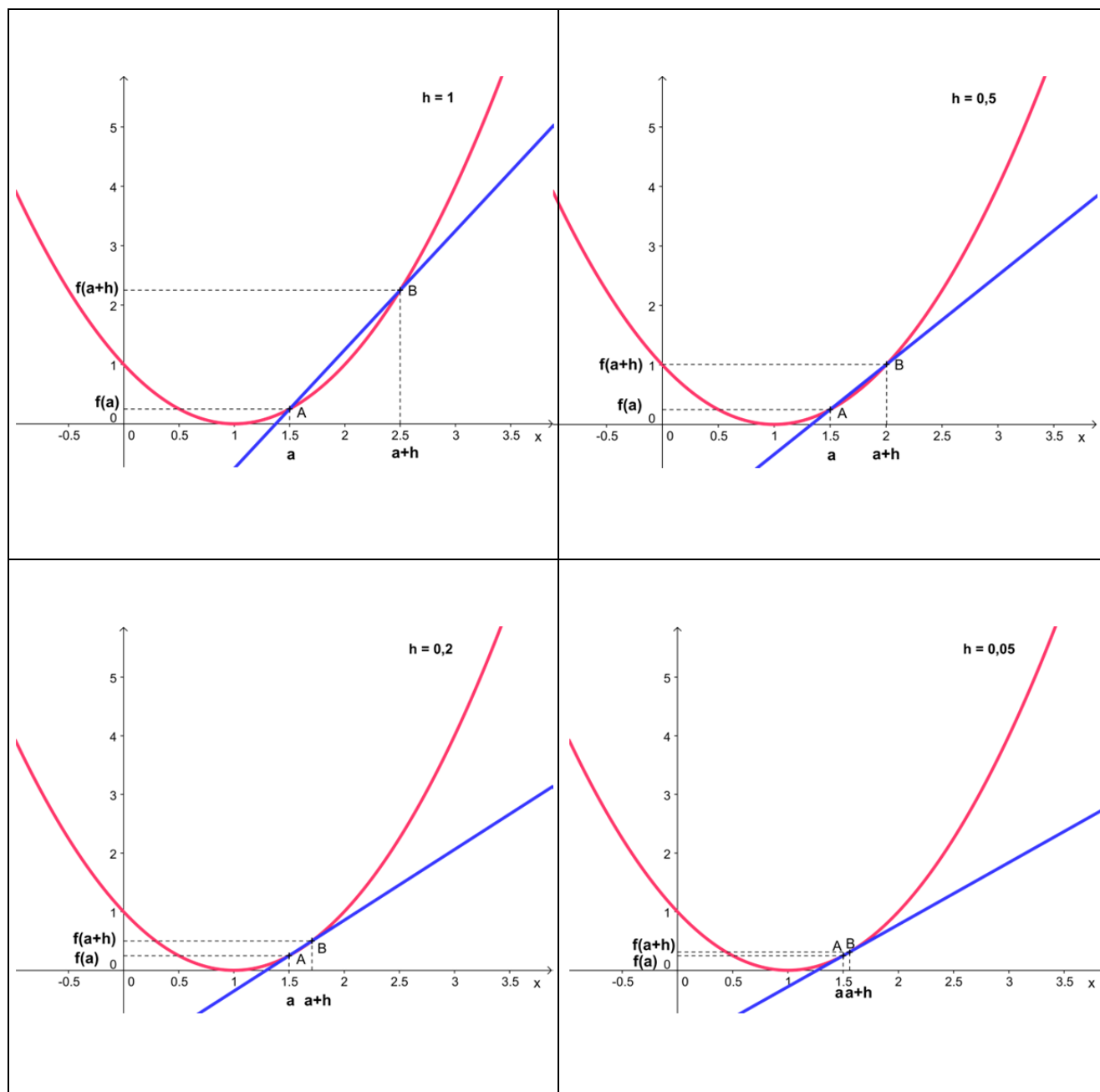
On déplace le point B sur la courbe (C) en le rapprochant de A (on dit que l'on fait tendre B vers A) et on étudie le comportement du nombre m .

Par conséquent on étudie le comportement de m lorsque h prend des valeurs de plus en plus proche de zéro. (On dit que h tend vers 0).

Exemples :

On reprend les exemples étudiés au 1)

1°) Figures obtenues :



A l'aide des graphiques ci-dessus on peut conjecturer que lorsque B tend vers A, c'est à dire lorsque h tend vers zéro, la droite (AB) semble prendre une position limite, dont le coefficient directeur serait la valeur prise par m lorsque h devient nul.

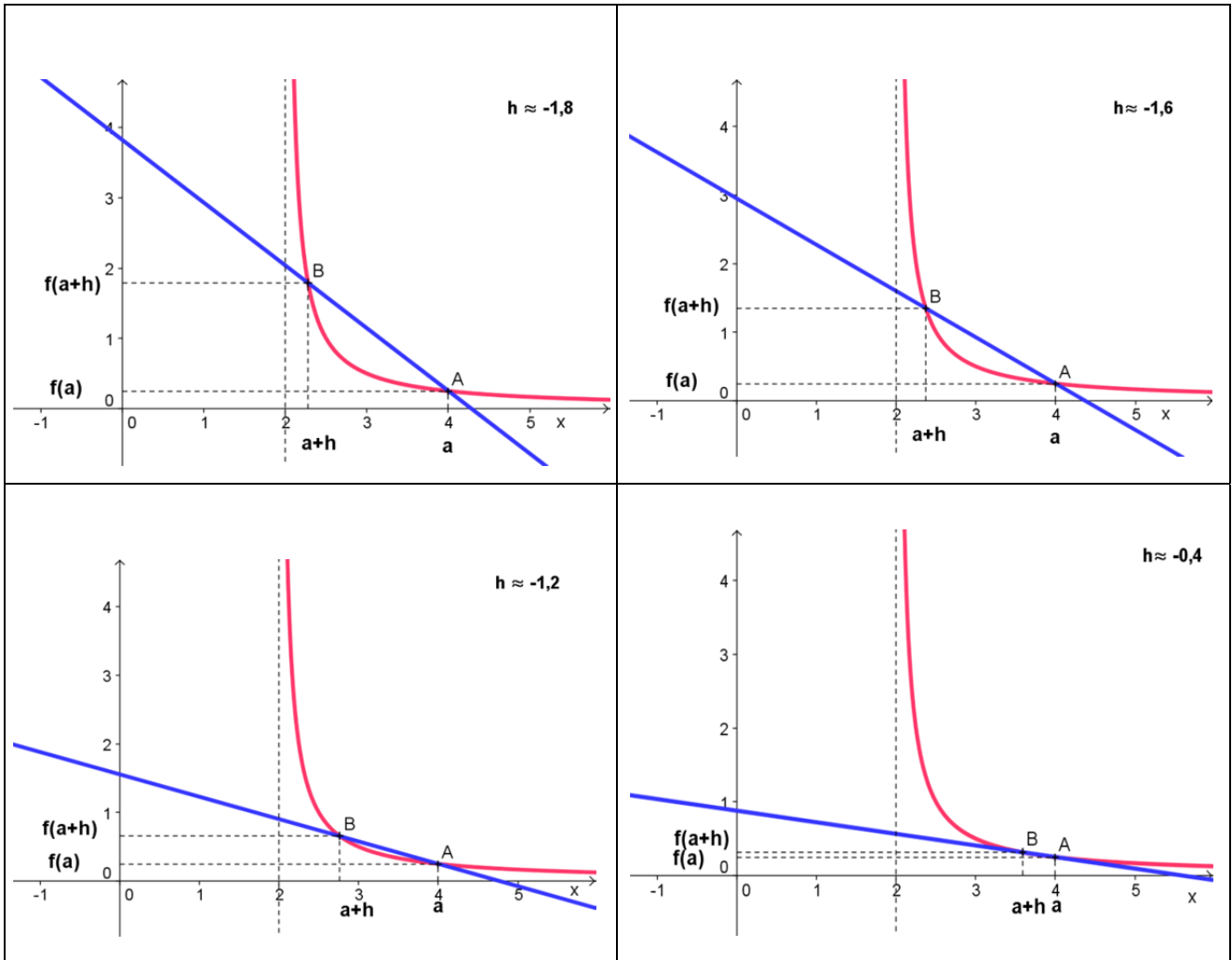
On appelle cette valeur (si elle existe) la **limite de m lorsque h tend vers zéro**

Dans cet exemple on a $m = h + 1$ donc la limite de m lorsque h tend vers zéro est 1, que l'on note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} m = 1$$

La droite (AB) prend donc une « position limite » et dans cette position, elle est appelée **tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.5** donc le coefficient directeur est 1

2°) Figures obtenues :



Là encore à l'aide des graphiques ci-dessus on peut conjecturer que lorsque B tend vers A, c'est à dire lorsque h tend vers zéro, la droite (AB) semble prendre une position limite, dont le coefficient directeur serait la valeur prise par m lorsque h devient nul.

Dans cet exemple on a $m = \frac{-2}{4(2h+4)}$ donc la limite de m lorsque h tend vers zéro est $\frac{-1}{8}$, que l'on note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} m = \frac{-2}{16}$$

ou

$$\lim_{h \rightarrow 0} m = \frac{-1}{8}$$

La droite (AB) prend donc une « position limite » et dans cette position, elle est appelée **tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 4** donc le coefficient directeur est $\frac{-1}{8}$

II) Définitions

1) Fonction dérivable en un point et nombre dérivé.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a , soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que la fonction f est dérivable au point d'abscisse a si et seulement si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers zéro. On note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a . On le note $f'(a)$.

Exemples :

1°) Soit $f(x) = x^2 - 3$, calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 3

Calcul du taux de variation : Pour $h \neq 0$: $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$f(3) = 3^2 - 3 = 6 \text{ et } f(3+h) = (3+h)^2 - 3 = 9 + 6h + h^2 - 3 = h^2 + 6h + 6$$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{h^2+6h+6-6}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 3 et $f'(3)=6$

2°) Soit $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ Calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Calcul du taux de variation $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$f(0+h) = \frac{4h}{h+2} \quad f(0) = 0$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{4h}{h+2}}{h} = \frac{4}{h+2}$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4}{h+2} \right) = 2$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 0 et $f'(0)=2$

2) Tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction dérivable en a , (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse a .

La tangente à la courbe (C) au point A ($a ; f(a)$) est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : La tangente à la courbe (C) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe (C) au voisinage du point A.

3) Equation de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en a , (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse a .

La tangente à la courbe (C) au point A a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

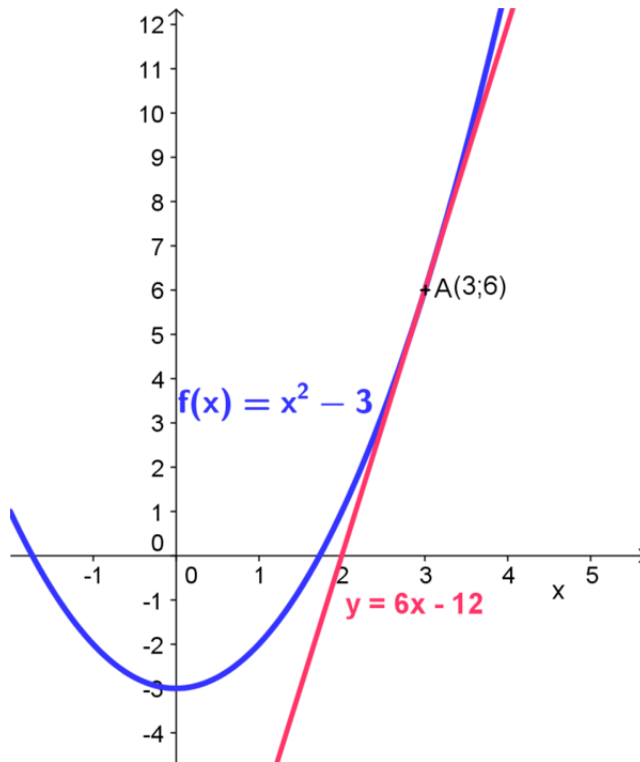
Remarque : La tangente à la courbe (C) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe (C) au voisinage du point A.

Exemples :

1°) Donner une équation de la tangente à la courbe (C) de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :

$$y = 6(x - 3) + 6 \text{ soit } y = 6x - 12$$



- 2°) Donner une équation de la tangente à la courbe (C) de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est : $y = 2x$

