

# Suites géométriques

## I) Définition

Soit  $n_0$  est un nombre entier naturel.

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du **TERME INITIAL**  $u_{n_0}$ , pour passer d'un terme au suivant, on **MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON**

**Exemple:** Une voiture, achetée neuve coûtait 20 000 € (en 2008), perd chaque année 20% de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :

$$20\,000 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 20\,000 \times \mathbf{0,8} = 16\,000. \text{ En 2009 la voiture coûtera } 16\,000 \text{ €.}$$

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :  $16\,000 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 16\,000 \times \mathbf{0,8} = 12\,800$ . En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :  $12\,800 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 12\,800 \times \mathbf{0,8} = 10\,240$ . En 2011 la voiture coûtait 10 240 €.

Et ainsi de suite ... on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit  $u_0$  la valeur de la voiture en 2008.  $u_0 = 20\,000$

$u_1$  est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire  $u_1 = u_0 \times \mathbf{0,8} = 16\,000$

$u_2$  est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire  $u_2 = u_1 \times \mathbf{0,8} = 12\,800$

Soit  $u_n$  la valeur de la voiture au bout de  $n$  années,  $u_n = u_{n-1} \times \mathbf{0,8}$

**Cette suite est géométrique** : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre (dans notre cas 0,8)

## II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite géométrique de premier terme  $u_{n_0}$  et de raison  $q$

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$ , une suite, et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à  $n_0$ .

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur  $q$  appelée raison:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

On peut obtenir directement la valeur de  $u_n$  à partir de celle de  $u_m$  en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 :  $u_n = u_0 \times q^n$

### Remarques :

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite géométrique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer  $u_{28}$  à partir de  $u_0$ , il faut effectuer 28 multiplications par le nombre  $r$ .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe**.

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier  $n$ , vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

### **Exemples :**

**Exemple 1 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par:  $u_{n+1} = u_n \times 3$  et  $u_0 = 2$

- 1) Justifier que cette suite est géométrique
- 2) Calculer  $u_1$ ;  $u_2$ ;  $u_3$  puis  $u_{15}$
- 3) Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$

### **Réponse :**

1) Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times 3$ . On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3, la suite est donc géométrique de raison 3 et de 1<sup>er</sup> terme 2

$$\begin{aligned}
 2) \quad u_1 &= u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6 & \mathbf{u_1 = 6} \\
 u_2 &= u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18 & \mathbf{u_2 = 18} \\
 u_3 &= u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54 & \mathbf{u_3 = 54}
 \end{aligned}$$

On applique la 2<sup>ème</sup> formule :

$$\begin{aligned}
 u_{15} &= u_0 \times 3^{15} \\
 u_{15} &= 2 \times 3^{15} & \mathbf{u_{15} = 43\,046\,721}
 \end{aligned}$$

$$3) \quad u_n = u_0 \times 3^n \qquad \mathbf{u_n = 2 \times 3^n}$$

**Exemple 2 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ et } u_1 = 3$$

- 1) Justifier que cette suite est géométrique
- 2) Calculer  $u_2$  ;  $u_3$  ;  $u_4$  puis  $u_{30}$
- 3) Calculer  $u_n$  en fonction de n

**Réponse :**

1) Pour tout n appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$ . On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par  $\frac{1}{2}$ . La suite est donc géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de 1<sup>er</sup> terme 3.

$$\begin{aligned}
 2) \quad u_2 &= \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 & \mathbf{u_2 = 1,5} \\
 u_3 &= \frac{u_2}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 & \mathbf{u_3 = 0,75} \\
 u_4 &= \frac{u_3}{2} = \frac{0,75}{2} = 0,375 & \mathbf{u_4 = 0,375}
 \end{aligned}$$

On applique la 2<sup>ème</sup> formule :

$$\begin{aligned}
 u_{30} &= u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{30-1} & \text{le 1}^{\text{er}} \text{ terme de la suite est } u_1 \text{ au lieu de } u_0 \\
 & & \text{La suite a donc un terme de moins donc} \\
 & & \text{la formule est } u_n = u_1 \times q^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

$$u_{30} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{29} \qquad \mathbf{u_{30} = \frac{3}{2^{29}}}$$

$$3) \quad u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$$

$$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} \qquad \mathbf{u_n = \frac{3}{2^{n-1}}}$$

**Exemple 3 :** Soit  $(u_n)$  la suite géométrique définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_3 = 4$  et  $u_6 = 32$ . Déterminer la raison et le 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  de  $u$

**Réponse :**

$u$  est une suite géométrique de raison  $q$ . Pour tous entiers  $m$  et  $n$  :

$$u_n = u_m \times q^{(n-m)}$$

$$u_6 = u_3 \times q^{(6-3)}$$

$$32 = 4 \times q^3 \text{ donc } q^3 = 8. \text{ Donc } q = 2$$

$$\text{Son 1}^{\text{er}} \text{ terme est } u_0 : u_3 = u_0 \times q^3$$

$$\text{on obtient : } 4 = u_0 \times 2^3 \text{ Donc } u_0 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}.$$

**La suite géométrique  $u$  a pour raison 2 et a pour 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = \frac{1}{2}$**

**Exemple 4 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par:  $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$

2. Montrer que  $u$  est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1<sup>er</sup> terme  $U_0$

**Réponse :**

1. Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$

2. Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$

**La suite est donc géométrique de raison  $\frac{5}{4}$ .  $u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$**

**Son 1<sup>er</sup> terme est  $u_0 = 5$**

### III) Sens de variation d'une suite géométrique

**Propriété:**

**Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite géométrique de raison  $q$  ( $q > 0$ ) et de 1<sup>er</sup> terme  $u_{n_0}$  :**

	$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	$(u_n)$ est strictement décroissante.	$(u_n)$ est strictement croissante.	$(u_n)$ est constante.
$u_{n_0} < 0$	$(u_n)$ est strictement croissante.	$(u_n)$ est strictement décroissante.	$(u_n)$ est constante.
$u_{n_0} = 0$	$(u_n)$ est une suite nulle		

### Exemples:

#### Exemple 1:

Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_{n+1} = u_n \times 3 \text{ et } u_0 = 2$$

#### Réponse :

Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $3 > 1$

**La suite  $(u_n)$  est donc croissante.**

#### Exemple 2:

Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_{n+1} = u_n \times 3 \text{ et } u_0 = -2$$

#### Réponse :

Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $3 > 1$  mais  $u_0 = -2 < 0$

**La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.**

#### Exemple 3 :

Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2} \text{ et } u_0 = 2$$

#### Réponse :

Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$

la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2} < 1$

**La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.**

## IV) Somme des puissances successives d'un nombre réel

### 1) Propriété:

Pour tout entier naturel non nul et  $q \neq 1$  :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Exemple:** Calculer  $S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^5$

$$S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^5 = \frac{1 - 10^{5+1}}{1 - 10} = \frac{1 - 10^6}{1 - 10} = \frac{1 - 1\,000\,000}{1 - 10} = \frac{-999\,999}{-9} = 111\,111$$

**S = 111 111**

## V) Exemple de graphique

**Exemples :**

Si  $r = 1$  ou si  $u_0 = 0$ , alors les points du graphique sont alignés, sur la droite d'équation  $y = u_0$  (**voir points rouges** ci-dessous pour  $u_0 = 0$  et **les points bleus** pour  $r = 1$  et  $u_0 = 3$ ).

**Les points verts** ci-dessous sont les premiers points de la représentation graphique de la suite géométrique de raison 1,2 et de terme initial  $u_0 = 0,5$ .

