Décomposition d'un vecteur selon deux axes orthogonaux

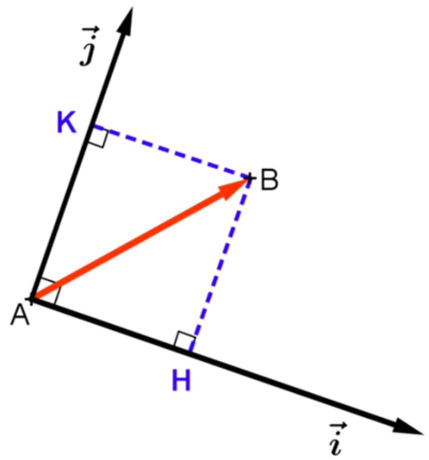
I) Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et (A ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) un repère orthogonal

Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ selon les axes (A ; $\vec{\imath}$) et (A ; $\vec{\jmath}$) orthogonaux revient à projeter orthogonalement le point B sur les axes (A ; $\vec{\imath}$) et (A ; $\vec{\jmath}$)

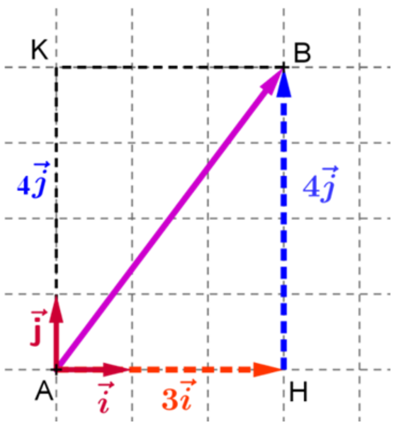
On obtient ainsi deux ponts H et K tel que :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$



Exemple :

Dans un repère orthonormé (A ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , on considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées : $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 4). On décompose ce vecteur selon les axes (A ; $\vec{\imath}$) et (A ;$\vec{\jmath}$). H et K sont les projetés orthogonaux respectifs du point B sur les axes (A ; $\vec{\imath}$) et (A ; $\vec{\jmath}$).



$\overrightarrow{AB}$ (3 ; 4)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$

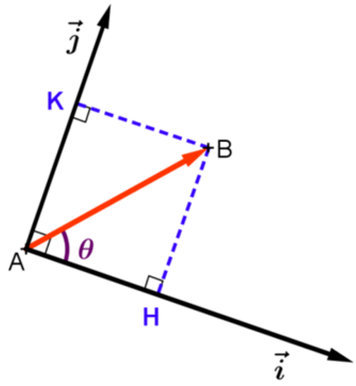
$\overrightarrow{AH} = 3\vec{\imath}$ et

$\overrightarrow{AK} = 4\vec{\jmath}$

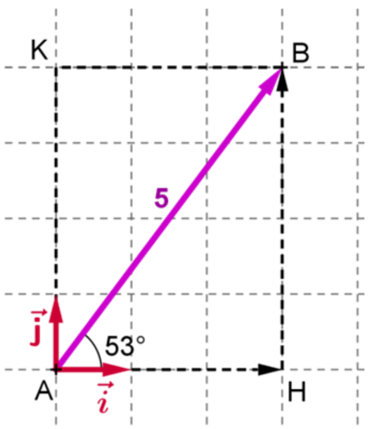
II) Propriété

Dans un repère orthonormé, lorsque l'angle ($\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AB}$) = θ on obtient :

AH = AB cos θ et AK = AB sin θ



Exemple :



Dans un repère orthonormé (A ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , on considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que AB = 5 et l'angle ($\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AB}$) = $53°$

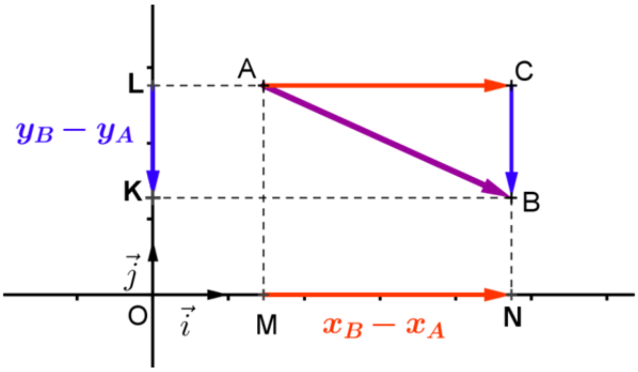
On a alors :

AH = AB cos 53° AH = 5 cos 53° donc : **AH ≃ 3 cm**

AK = AB sin 53° AK = 5 sin 53° donc : **AK ≃ 4 cm**

III) Projetés orthogonaux d'un vecteur sur les axes d'un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B)



On a : $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$) On obtient donc :

$\overrightarrow{AC}$ = ($x_B - x_A$) $\vec{i}$ et $\overrightarrow{CB}$ = ($y_B - y_A$) $\vec{j}$

$\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CB}$ = $\overrightarrow{LK}$

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont respectivement les projetés du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur les axes (O, $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$)

IV) Application

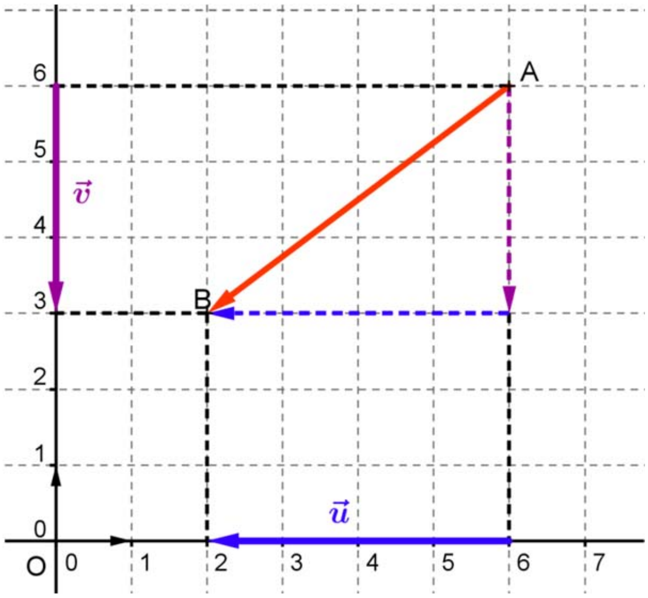
Exemple 1 : Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; on considère les points B(2 ; 3) et A(6 ; 6)

Dans ce repère, on projette le vecteur $\overrightarrow{AB}$ respectivement sur les axes (O, $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$).

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis la distance AB

2) Quels sont les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ projetés orthogonaux respectifs du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur les axes (O, $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$).

Solution :



1) $\overrightarrow{AB}$ (2 – 6 ; 3 – 6) = (-4 ; -3)

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **sont :** $\overrightarrow{AB}$ **(-4 ; -3)**

AB = $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}$ = 5. **AB = 5 cm**

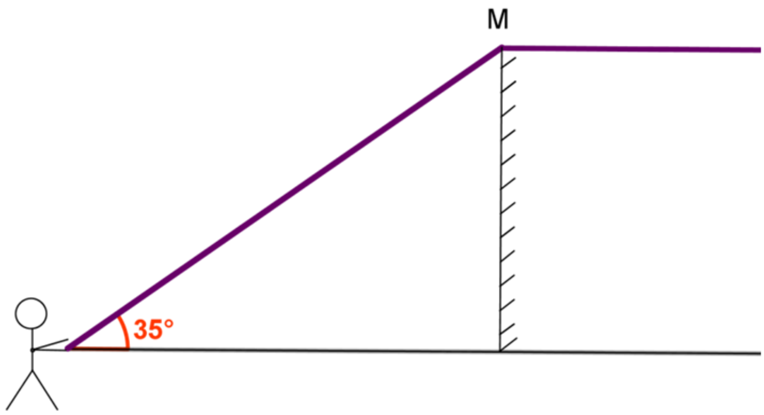
2) $\vec{u}$ = ($x_B - x_A$) $\vec{i}$ et $\vec{v}$ = ($y_B - y_A$) $\vec{j}$

$\vec{u} = -4\vec{i}$ et $\vec{v} = -3\vec{j}$

$\|\vec{u}\|$ **= 4 et** $\|\vec{v}\|$ **= 3**

Exemple 2 :

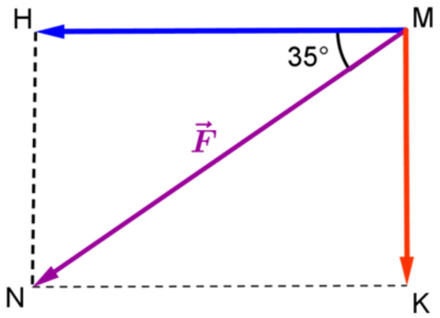
Une personne tire sur une corde attachée à un mur vertical avec une force de 250 N suivant un angle de 35° avec l'horizontale.



1. Déterminer la décomposition de la force exercée par la corde au point M.
2. Calculer l'intensité des composantes

Solution :

1) On fait un schéma pour illustrer la situation :



2)

MH = MN cos35° et MK = MN sin 35°

MH = 250 cos35° et MK = 250 sin 35°

MH ≈ 204,79 N et **MK ≈ 143,39 N**