Nombres complexes
Forme algébrique

I) Forme algébrique d'un nombre complexe

1) Définitions

- **On admet l'existence d'un nombre, noté i dont le carré est égal à -1**

$$i^2 = -1$$

- **On appelle alors nombre complexe tout nombre de la forme $x + yi$ où x et y sont deux nombres réels.**
- **Cette écriture est dite forme algébrique du nombre complexe.**
- **Le réel x est la partie réelle du nombre complexe.**
- **Le réel y est la partie imaginaire du nombre complexe.**
- **L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$**

Exemples :

$5 - 3i$ est un nombre complexe de partie réelle 5 et de partie imaginaire -3
$2 + i$ est un nombre complexe de partie réelle 2 et de partie imaginaire 1

Remarques :

• Si un nombre complexe a une partie imaginaire nulle c'est un nombre réel.
• Si un nombre complexe a une partie réelle nulle il s'écrit yi. Un tel nombre est dit imaginaire pur (exemples $3i$ ou $-5i$)

2) Propriétés

a) Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulemet si leurs parties réelles et leurs partie imaginaires sont égales.

$$x + yi = a + bi \text{ si et seulement si } x = a \text{ et } y = b$$

b) Relation entre réels et complexes

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est inclus dans l'ensemble de nombres complexes $\mathbb{C}$

Un nombre réel x est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle $x = x + 0i$

Remarque importante : Les nombres complexes sont souvent utilisés en électricité. Afin de ne pas confondre le nombre i dont le carré vaut -1 avec l'intensité d'un courant, le nombre i est noté j par les physiciens.

II) Opérations sur les nombres complexes

1) Addition, soustraction

a) Définition de l'addition dans $\mathbb{C}$

On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ une addition notée + par :

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i$$

Exemples :

a) $(3 + 4i) + (-2 + 2i) = (3 - 2) + (4 + 2)i = \mathbf{1 + 6i}$
b) $(6 - 3i) + (-6 + 7i) = (6 - 6) + (-3 + 7)i = \mathbf{4i}$
c) $(3 + 4i) + (8 - 4i) = (3 + 8) + (4 - 4)i = \mathbf{11}$

b) Définition de la soustraction dans $\mathbb{C}$

• **Soit le nombre complexe $z = x + yi$. On appelle opposé de z le nombre complexe noté $-z$ défini par $-z = -x - yi$**

•**La soustraction dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est définit comme l'addition de l'opposé $(x + yi) - (x' + y'i) = (x + yi) + (-x' - y'i) = (x - x') + (y - y')i$**

Exemples :

a) $(3 + i) - (5 - 4i) = (3 + i) + (-5 + 4i) = -2 + 5i$
b) $(5 + 3i) - (7 + 3i) = (5 + 3i) + (-7 - 3i) = -2$
c) $(-2 + 3i) - (-2 - 4i) = (-2 + 3i) + (2 + 4i) = 7i$

Remarque

L'addition et la soustraction dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$

2) Multiplication

a) Définition

On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ une multiplication notée $\times$ par :

$$(x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

Remarque :

Soit z $= x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors zz' **=** $(x + yi) \times (x' + y'i)$ il suffit d'utiliser la double distributivité comme dans $\mathbb{R}$**.**

zz' $= (x + yi) \times (x' + y'i)$ **=** $xx' + xy'i + yix' + yy'i^2 = xx' - yy' + i(xy' + yx')$

Il n'est pas utile d'apprendre par cœur la formule précédente mais de savoir la retrouver

Exemples

a) $(3+2i)\times(4-3i) = (3\times4+2\times3)+(-3\times3+4\times2)i = 20-i$

b) $(1+3i)\times(2+4i) = (1\times2-3\times4)+(1\times4+2\times3)i = -10+10i$

c) $(5+2i)\times(5-2i) = (5\times5+2\times2)+(-5\times2+2\times5)i = 29$

d) $3i\times4i = -12$

Remarques

La multiplication dans $\mathbb{C}$ a les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ donc

- Il est inutile d'apprendre par cœur la formule précédente
- Les produits remarquables se développent comme dans $\mathbb{R}$

Exemples :

a) $(2+3i)^2 = 2^2+2\times2\times3i+(3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$

b) $(4-2i)^2 = 4^2-2\times4\times2i+(2i)^2 = 16-16i-4 = 12-16i$

c) $(2+6i)(2-6i) = 2^2-(6i)^2 = 4+36 = 40$

3) Inverse, quotient

a) Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = x+yi$. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = x-yi$

Exemples :

a) Le nombre complexe $3+5i$ a pour conjugué $3-5i$

b) Le nombre complexe $2-i$ a pour conjugué $2+i$

c) Le nombre complexe $7i$ a pour conjugué $-7i$

d) Le nombre complexe 5 a pour conjugué 5

Remarques :

On a les relations suivantes :

- Conjugués et addition : $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- Conjugué et soustraction : $\overline{z-z'} = \bar{z} - \overline{z'}$
- Conjugué et multiplication : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

b) Propriété

Soit le nombre complexe $z = x + y\,i$.

On a : $z\bar{z} = x^2 + y^2$

$z\bar{z}$ est donc un nombre réel positif (nul si et seulement si $z = 0$)

Exemple:

Soit $z = 3 + 5i$ $\bar{z} = 3 - 5i$

$z\bar{z} = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

$z\bar{z} = 34$

c) Définition : inverse d'un nombre complexe

Si le nombre complexe $z = x + yi$ est non nul alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\,i$$

Exemples

a) Si $z = 1 + 3i$ alors $\frac{1}{Z} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$

b) Si $z = 2 - 2i$ alors $\frac{1}{Z} = \frac{1}{2-2i} = \frac{2+2i}{(2-2i)(2\mp2i)} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

c) Si $z = i$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i\times(-i)} = -i$

d) Si $z = -3i$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{-3i} = \frac{3i}{-3i\times3i} = \frac{3i}{9} = \frac{1}{3}i$

d) Définition : Quotient de deux nombres complexes

Soit les nombres complexes $z = x + y\,i$, et $z' = x' + y' i$ où $z' \neq 0$ alors :

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{(x + yi)(x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{(x + yi)(x' - y'i)}{x'^2 + y'^2}$$

Exemples : Ecrire sous forme algébrique les quotients suivants

a) $\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $\frac{5+2i}{2+7i} = \frac{(5+2i)(2-7i)}{(2+7i)(2-7i)} = \frac{24-31i}{53} = \frac{24}{53} - \frac{31}{53}i$

c) $\frac{2+4i}{3i} = \frac{(2+4i)(-3i)}{3i\times(-3i)} = \frac{12-6i}{9} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}i$

Remarque :

Pour écrire le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.
Il est donc inutile de retenir par cœur la formule encadrée.

III) Représentation géométrique d'un nombre complexe

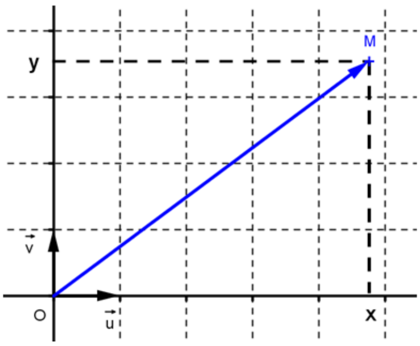
Dans tout ce qui suit le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

- **A tout nombre complexe $z = x + y\,i$ on associe :**

- soit le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appelé point image de z

- soit le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ appelé vecteur image de z

•Réciproquement :
à tout point M (ou à tout vecteur $\overrightarrow{OM}$)
de coordonnées $(x\,;y)$ on associe le nombre complexe $z = x + y\,i$ appelé affixe du point M
(ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$)



Exemples : Ecrire sous forme algébrique les quotients suivants

Exemples :

a) Le nombre complexe $3 - 2i$ a pour point image le point $A\,(3\,;\,-2)$ et pour vecteur image le vecteur $\overrightarrow{OA}\,(3\,;\,-2)$

b) Le nombre complexe $-5i$ a pour point image le point $B(0\,;\,-5)$ et pour vecteur image le vecteur $\overrightarrow{OB}\,(0\,;\,-5)$

c) Le point $C(-2\,;\,4)$ a pour affixe le nombre complexe $-2 + 4i$

d) Le vecteur $\overrightarrow{OD}(0;2)$ a pour affixe le nombre complexe 2i

e) Le point $M\,(4\,;\,0)$ a pour affixe le nombre complexe 4

2) Points images particuliers

• Tout nombre réel a pour point image un point de l'axe des abscisses. Réciproquement tout point de l'axe des abscisses a pour affixe un nombre réel. Dans le plan complexe l'axe des abscisses est appelé **axe des réels**.

• Tout nombre imaginaire pur a pour point image un point de l'axe des ordonnées. Réciproquement tout point de l'axe des ordonnées a pour affixe un nombre imaginaire pur.
Dans le plan complexe l'axe des abscisses est appelé **axe des imaginaires**.

• Si le nombre complexe z a pour point image le point M, alors le conjugué de z a pour image le point N symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses

3) Calcul de l'affixe d'un vecteur

a) Propriété

Si les points A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

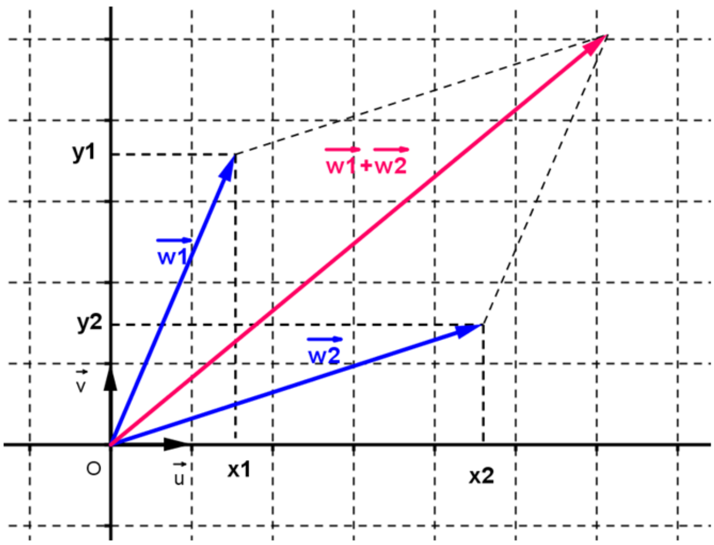
Exemples :

a) Si on a les points A d'affixe $1 + 2i$ et B d'affixe $3 - i$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe le nombre complexe $(3 - i) - (1 + 2i) = 2 - 3i$

b)Si on a les points M d'affixe $2i$ et N d'affixe 5+2 i alors le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe le nombre complexe $(5 + 2\,i) - (2i) = 5$ (le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(5\,;0)$

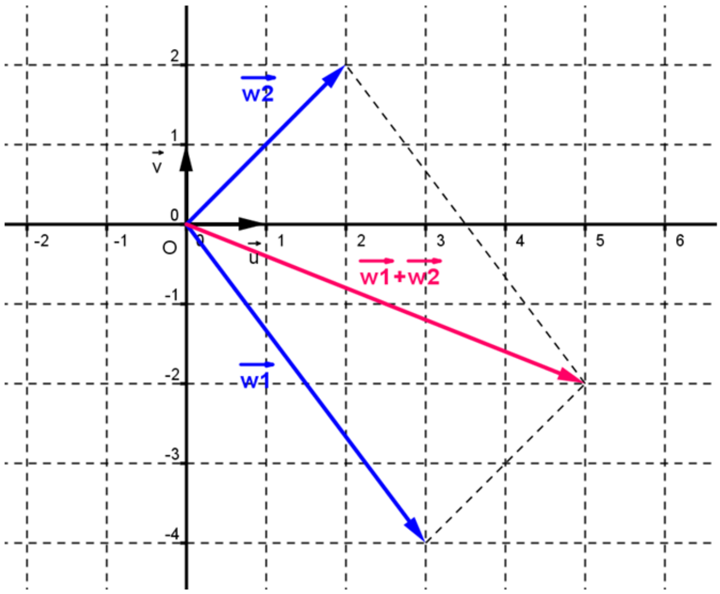
b) Propriété

Si $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2 alors le vecteur $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ a pour affixe $z_1 + z_2$



Exemple

Si $\vec{w}_1$ a pour affixe $z_1 = 3 - 4i$ et $\vec{w}_2$ a pour affixe $z_2 = 2 + 2i$ alors $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ a pour affixe $(3 - 4i) + (2 + 2i) = 5 - 2i$ comme l'illustre la figure ci-dessous :



Remarques

Si $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2

alors on a aussi :

- Le vecteur $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ a pour affixe $z_1 - z_2$
- Pour tout nombre k réel le vecteur $k\,\vec{w}_1$ a pour affixe $k\,z_1$