Nombres complexes :
Forme Trigonométrique

I) Module et argument d'un nombre complexe

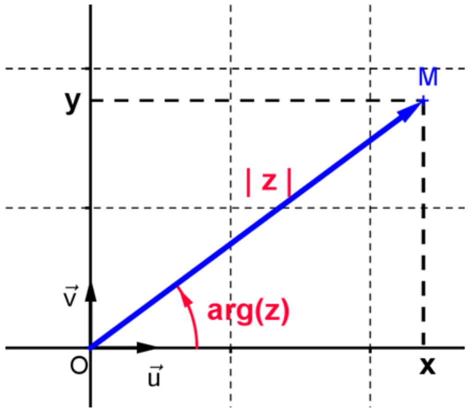
1) Définitions

Soit le nombre complexe $z = x + y\,i$

On note M le point d'affixe z dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$

- **On appelle module du nombre complexe z et on note $|z|$ la distance OM ; $|z| = OM$**
- **Si z est non nul, on appelle argument du nombre complexe z, et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$**

$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ à 2π près.

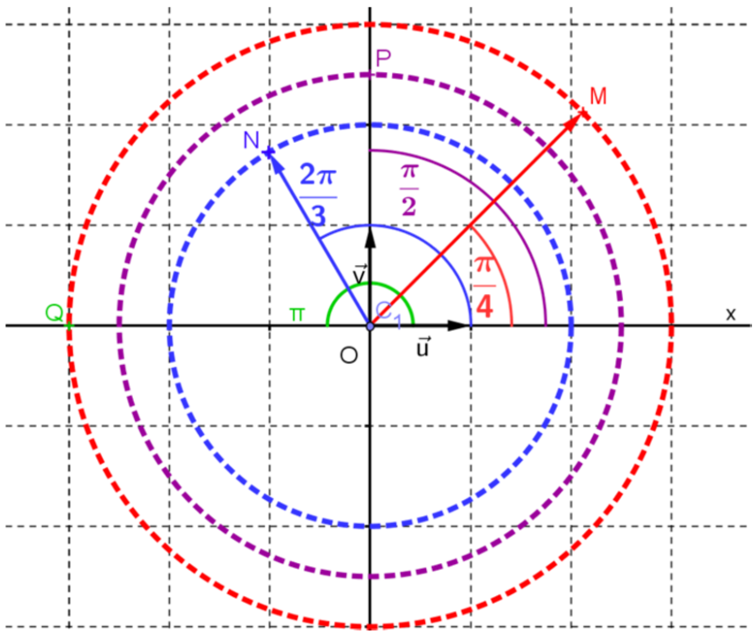


Remarque : Le module d'un nombre complexe est une distance : c'est donc un nombre réel positif.

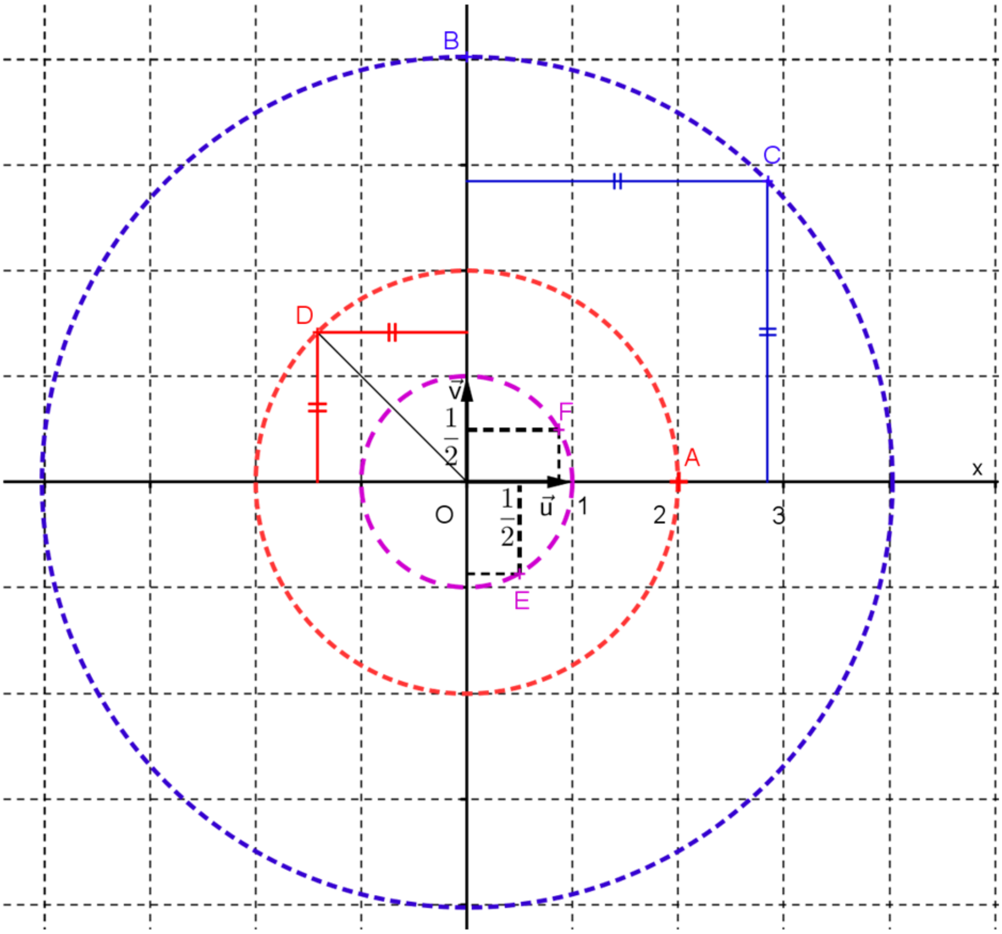
Exemples

Exemple 1 :

- Placer le point M d'affixe z_1 tel que $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{4}$ à 2π près et $|z_1| = 3$
- Placer le point N d'affixe z_2 tel que $\arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3}$ à 2π près. et $|z_2| = 2$
- Placer le point P d'affixe z_3 tel que $\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près. et $|z_3| = \dfrac{5}{2}$
- Placer le point Q d'affixe z_4 tel que $\arg(z_4) = \pi$ à 2π près. et $|z_4| = 3$



Exemple 2 : Les cercles représentés ci-dessous ont pour centre O et pour rayons 1 ; 2 et 4. Donner le module et un argument des affixes des points A, B, C, D, E et F.



- **Pour le point A:**

A est sur le cercle de centre O et de rayon 2 alors $|z_A| = 2$
A est sur l'axe des abscisses donc arg (z_A) = 0 à 2π près.

- **Pour le point B:**

B est sur le cercle de centre O et de rayon 4 alors $|z_B| = 4$
B est sur l'axe des ordonnées donc arg (z_B) = $\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

- **Pour le point C:**

C est sur le cercle de centre O et de rayon 4 alors $|z_C| = 4$
C a son abscisse égale à son ordonnée, toutes les deux comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc arg (z_C) = $\frac{\pi}{4}$ à 2π près.

- **Pour le point D:**

D est sur le cercle de centre O et de rayon 2 alors $|z_D| = 2$
D a son abscisse égale à son ordonnée, son abscisse étant comprise $\frac{\pi}{2}$ et π, son ordonnée entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ alors : arg (z_D) = $\frac{3\pi}{4}$ à 2π près

- **Pour le point E:**

E est sur le cercle de centre O et de rayon 1 alors $|z_E| = 1$

E est sur le cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$, on reconnait l'abscisse de l'angle $\frac{\pi}{3}$,
comme son ordonnée est comprise entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$,alors : arg (z_E) = $-\frac{\pi}{3}$ à 2π près

- **Pour le point F:**

F est sur le cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$, on reconnait l'ordonnée de l'angle $\frac{\pi}{6}$,
comme son abscisse est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ alors : arg (z_E) = $\frac{\pi}{6}$ à 2π près

II) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

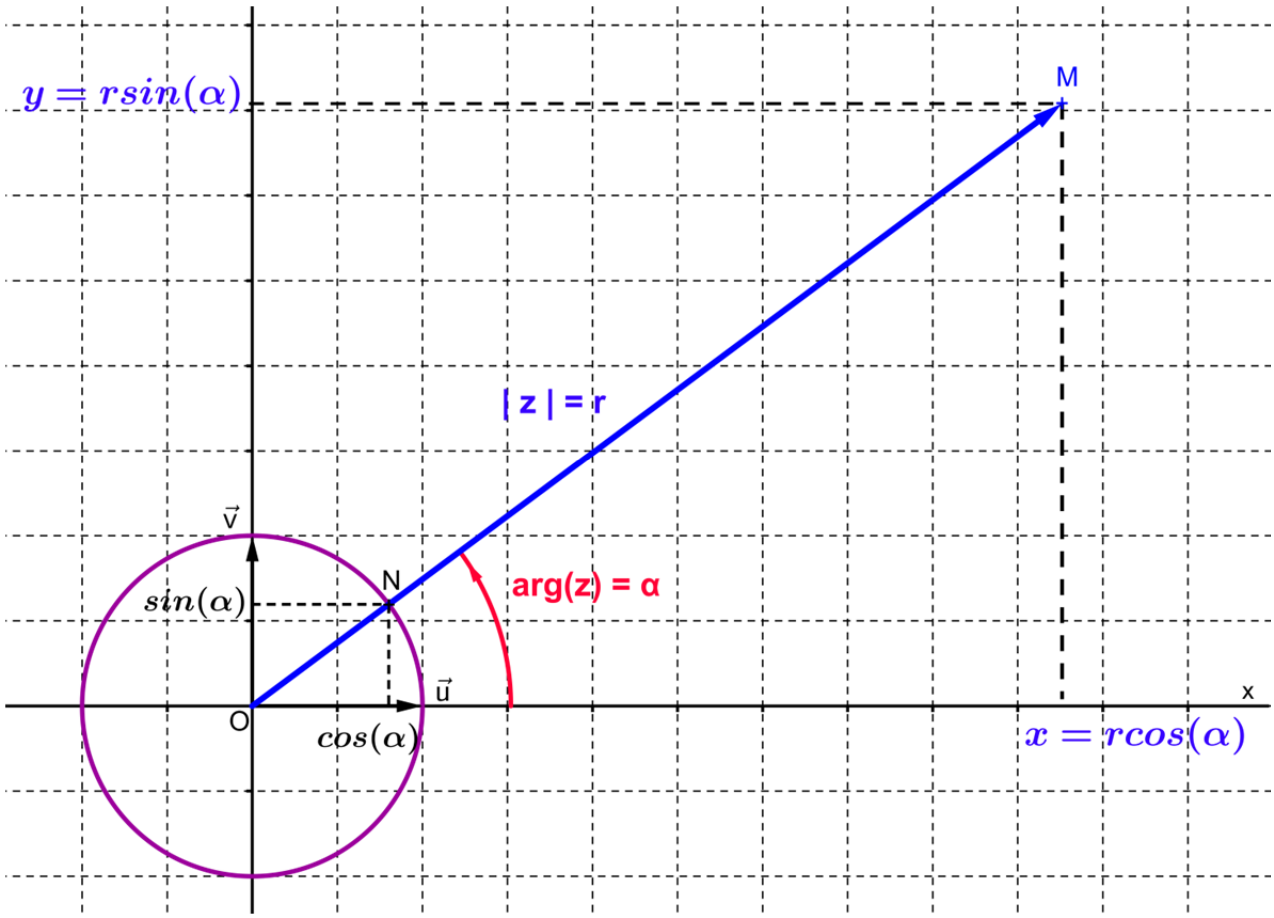
Soit z un nombre complexe non nul dont le module est r et un argument est α
On note :

- M le point image de z
- N l'intersection de la demi droite [OM) avec le cercle trigonométrique

On a donc : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{ON}$
Les coordonnées de N étant (cos(α) ; sin(α)) celles de M sont (rcos(α) ; rsin(α))

D'où on peut écrire z = rcos(α)+ i rsin(α)

Voir figure ci-dessous :



1) Théorème

Soit z le nombre complexe de module r et d'argument α

On peut écrire :

$$z = r\cos(\alpha) + i\,r\sin(\alpha) = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$$

Dans ce cas on note $z = [\, r\,;\,\alpha\,]$ cette écriture est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z

Exemples : Dans l'exemple 2 du paragraphe précédent, nous avions trouvé :

- **Pour le point A :** $|z_A| = 2$ et arg $(z_A) = 0$ à 2π près.

Dans ce cas on peut écrire : $z_A = 2\,(\cos 0 + i \sin 0) = [2\,;\,0]$

- **Pour le point B:** $|z_B| = 4$ et arg $(z_B) = \frac{\pi}{2}$ à 2π près.

Dans ce cas on peut écrire : $z_B = 4\,(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}) = [4\,;\,\frac{\pi}{2}]$

- **Pour le point C:** $|z_C| = 4$ et arg $(z_C) = \frac{\pi}{4}$ à 2π près.

Dans ce cas on peut écrire : $z_C = 4\,(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) = [4\,;\,\frac{\pi}{4}]$

etc ...

III) Passage d'une forme à l'autre

Le module de $z = x + iy$ est la distance OM qui est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$

Donc $|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Cette égalité permet de d'obtenir des formules entre les deux formes.

1) Théorème

Soit un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + i\,y$ et de forme trigonométrique z = [r ; α]

- **Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :**

$$x = r\cos(\alpha)$$
$$y = r\sin(\alpha)$$

- **Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :**

$$|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et } \sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exemples :

1) Soit le nombre complexe de forme algébrique z_1 = 4 – 4i

Sa forme trigonométrique est donc [r ; α] avec

$r = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$cos(\alpha) = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin(\alpha) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

On reconnait, à partir des valeurs des angles remarquables , le cosinus et le sinus de l'angle $-\frac{\pi}{4}$ à 2π près : z a donc pour module $r = 4\sqrt{2}$ et pour argument $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ à 2π près

Donc : $\boldsymbol{z_1 = [4\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}]}$

2) Soit z_2 le nombre complexe de forme trigonométrique $[3 ; \frac{5\pi}{6}]$

Sa forme algébrique est donc z_2 = 3 (cos $(\frac{5\pi}{6})$ + i sin $(\frac{5\pi}{6})$)

Soit $\boldsymbol{z_2 = 3 (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})}$

3) Soit le nombre complexe de forme algébrique $z_3 = 2 + 2i$

Sa forme trigonométrique est donc [r ; α] avec

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$cos(\alpha) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin(\alpha) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On reconnait, à partir des valeurs des angles remarquables, le cosinus et le sinus de l'angle $\frac{\pi}{4}$ à 2π près : z_3 a donc pour module $r = 2\sqrt{2}$ et pour argument $\alpha = \frac{\pi}{4}$ à 2π près

Donc : $\boldsymbol{z_3 = [2\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}]}$

4) Soit le nombre complexe de forme algébrique $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$

Sa forme trigonométrique est donc [r ; α] avec

r = $\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$cos(\alpha) = \frac{-1}{2}$ et $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On reconnait, à partir des valeurs remarquables des angles, le cosinus et le sinus de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ à 2π près :

z_4 a donc pour module r = 2 et pour argument α = $\frac{2\pi}{3}$ à 2π près

Donc: $\boldsymbol{z_4 = [2 ; \frac{2\pi}{3}]}$

5) Soit le nombre complexe de forme algébrique $z_5 = 4i$

Sa forme trigonométrique est donc [r ; α] avec

r = $\sqrt{4^2} = 4$

$cos(\alpha) = 0$ et $sin(\alpha) = 1$

On reconnait, à partir des valeurs remarquables des angles, le cosinus et le sinus de l'angle $\frac{\pi}{2}$ à 2π près : z_5 a donc a pour module r = 4 et pour argument α = $\frac{\pi}{2}$ à 2π près donc : $\boldsymbol{z_5} = \left[\boldsymbol{4\ ;\frac{\pi}{2}}\right]$

6) Soit le nombre complexe de forme algébrique $z_6 = -3$

Sa forme trigonométrique est donc [r ; α] avec

r = $\sqrt{(-3)^2} = 3$

$cos(\alpha) = -1$ et $sin(\alpha) = 0$

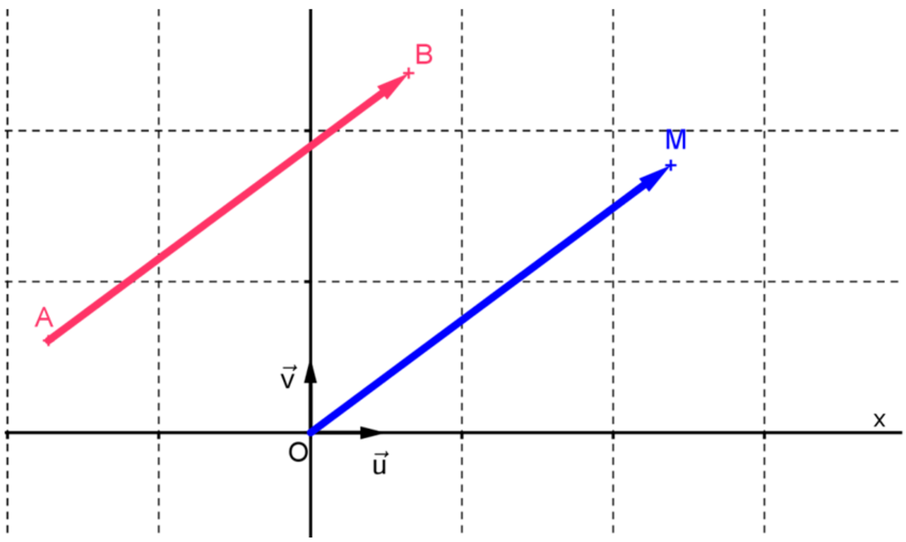
On reconnait, à partir des valeurs remarquables des angles, le cosinus et le sinus de l'angle π à 2π près : z_6 a donc a pour module r = 3 et pour argument α = π à 2π près donc : $\boldsymbol{z_6} = [\boldsymbol{3\ ;\pi}]$

IV) Utilisation du module et de l'argument en géométrie

Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux points d'affixes respectives $\boldsymbol{z_A}$ et $\boldsymbol{z_B}$. Le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a pour affixe le nombre complexe $\boldsymbol{z_B} - \boldsymbol{z_A}$. Soit $\boldsymbol{M}$ le point d'affixe $\boldsymbol{z_B} - \boldsymbol{z_A}$ c'est à dire le point M tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

Le quadrilatère OMBA étant un parallélogramme on en déduit que

- OM = AB = | $\boldsymbol{z_B} - \boldsymbol{z_A}$ |
- $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(\boldsymbol{z_B} - \boldsymbol{z_A})$ à 2π près



1) Théorème

Si A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors

- $AB = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ **à 2π près**

Exemples

Exemple 1 :

Si A a pour affixe $z_A = 2 + 3i$ et B a pour affixe $z_B = 2 + 5i$ alors on a

$AB = |z_B - z_A| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ à 2π près

Exemple 2 :

Soit A le point d'affixe (2 + i) ; B le point d'affixe (2 + 4i) et C le point d'affixe (5 + i)

Quelle est la nature exacte du triangle ABC ?

•

AB = $|z_B - z_A| = |(2+4i) - (2+i)| = |3i| = 3$

BC = $|z_C - z_B| = |(5+i) - (2+4i)| = |3-3i| = \sqrt{18}$

AC = $|z_C - z_A| = |(5+i) - (2+i)| = |3| = 3$

On a donc AB = AC. Le triangle ABC est isocèle en A

•

Le côté le plus grand est [BC]

$$\left.\begin{array}{l}\text{D'une part : } BC^2 = \sqrt{18}^{\,2} = 18 \\ \text{D'autre part } AB^2 + AC^2 = 9 + 9 = 18\end{array}\right\} \text{Donc } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A

Conclusion : Le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A