Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

I) Epreuve et loi de Bernoulli

1) Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre , toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

• L'une appelée succès notée S dont la probabilité de réalisation est p

• L'autre appelée échec notée E ou $\overline{S}$ dont la probabilité de réalisation est $1-p$

Exemples

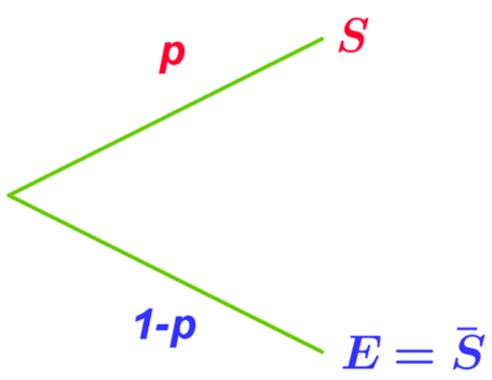
Exemples

1) Un lancer de pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ (le succès S étant indifféremment « obtenir PILE » ou « obtenir FACE »).

2) Un lancer de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, dans lequel on s'intéresse à l'apparition de S : « obtenir un 1» est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1 - p = \frac{5}{6}$

3) Extraire une carte d'un jeu de 32 cartes et s'intéresser à l'obtention d'un as est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{8}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1 - \mathrm{p} = \frac{7}{8}$

Illustration



Note historique : Jacques **Bernoulli** est un mathématicien suisse (1654 – 1705)

II) Schéma de Bernoulli

1) Définition 1 : Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de Bernoulli comportant n épreuves (n entier naturel non nul) de paramètre p , toute expérience consistant à répéter n fois de façon indépendantes une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exemples

Exemples :

1) 5 lancers successifs d'une pièce bien équilibrée, en appelant succès l'obtention de

PILE constitue un schéma de Bernoulli avec $\boldsymbol{n = 5}$ et de paramètre $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$

2) 10 lancers de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, en appelant succès l'apparition de S : « obtenir un 1» constitue un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et de paramètre $p = \frac{1}{6}$

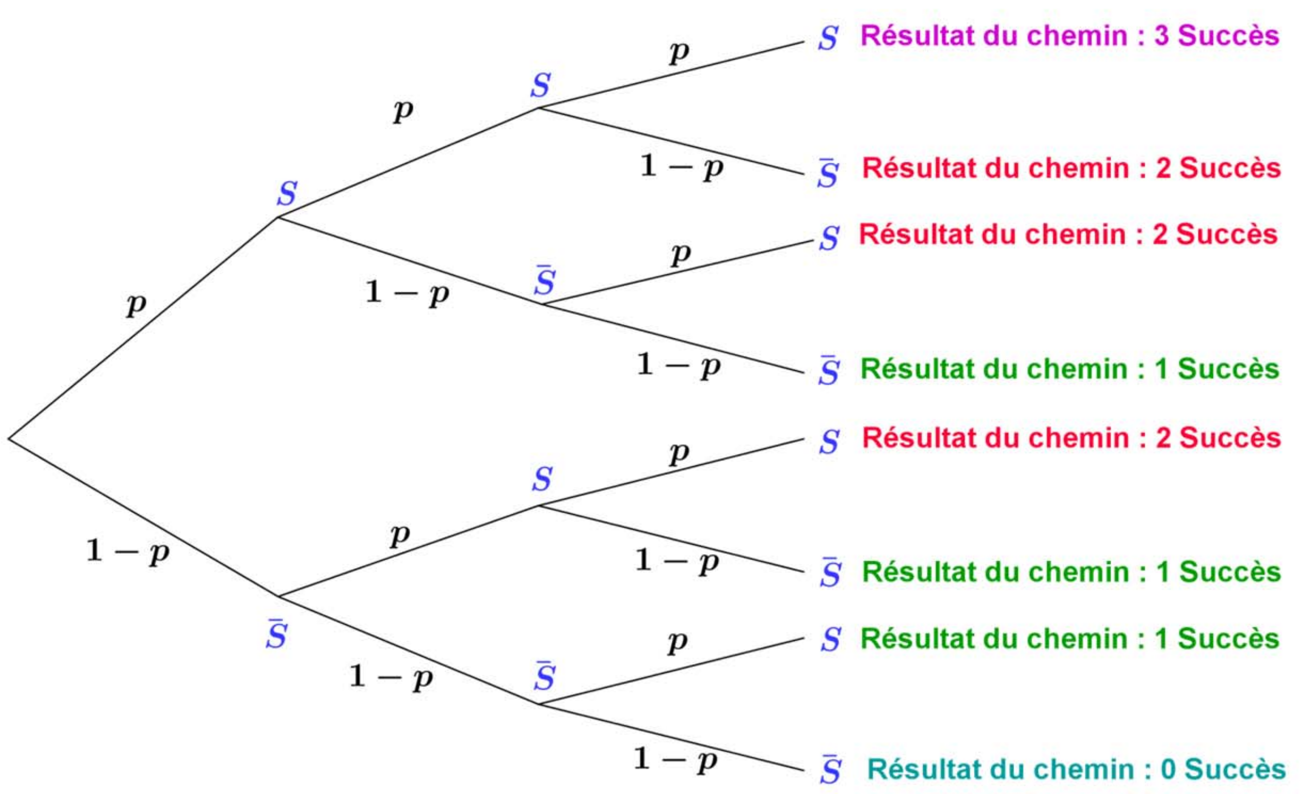
Remarques :

• Un schéma de Bernoulli peut être illustré par un arbre **(ci-dessous cas de n = 3**)

• Un résultat est une liste de n issues S ou $\bar{S}$ (par exemple $\{S, \bar{S}, \bar{S}, S, \bar{S}\}$ dans un schéma à 5 épreuves)

• Le chemin codé $S\ \bar{S}\ \bar{S}\ S\ \bar{S}$ est un chemin qui réalise 2 succès lors de 5 répétitions.

Illustration :



2) Définition 2

On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves (entier naturel non nul), représenté par un arbre comme ci-dessus ($n = 3$).
Sur chaque branche de l'arbre on indique la probabilité de l'événement placé à droite de cette branche.
On admet que, pour la répétitions d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chacun des résultats.

Exemples

Exemple :

Dans l'arbre représenté ci-dessus on a :

La probabilité de la liste (S ; $\bar{S}$; S) est : $p \times (1-p) \times p$

La probabilité de la liste ($\bar{S}$; $\bar{S}$; $\bar{S}$) est : $(1-p) \times (1-p) \times (1-p) = (1-p)^3$

III) Loi binomiale

1) Définition

On considère une épreuve de Bernoulli dans laquelle la probabilité du succès est p On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante. Soit X la fonction qui à chaque issue du schéma de Bernoulli prend pour valeurs le nombre de succès obtenus.
On dit que X est la variable aléatoire associée à ce schéma.

On note "$X = k$" l'événement " on obtient k succès" et P($X = k$) la probabilité de cet événement.

On appelle "loi de X" la donnée de chacune des valeurs de P($X = k$) pour k variant de 0 à n
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n , p)$

Exemples :

1) On considère l'expérience suivante : On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 1 apparaît.

Quelle est la loi suivie par la variable X ?

Solution :

Les lancers étant identiques et indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$ $\mathcal{B}(10 ,\frac{1}{6})$

2) Deux joueurs Alain et Bernard s'affrontent dans un tournoi de tennis. Alain et Bernard jouent 9 matchs. La probabilité qu'Alain gagne un match est 0,6.Le vainqueur est celui qui gagne le plus de matchs. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de matchs gagnés par Bernard.

Quelle est la loi suivie par X ?.

Solution :

Les matchs étant identiques et leurs résultats indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}4$ $\mathcal{B}(9 , 0{,}4)$

3) Loi d'une variable aléatoire

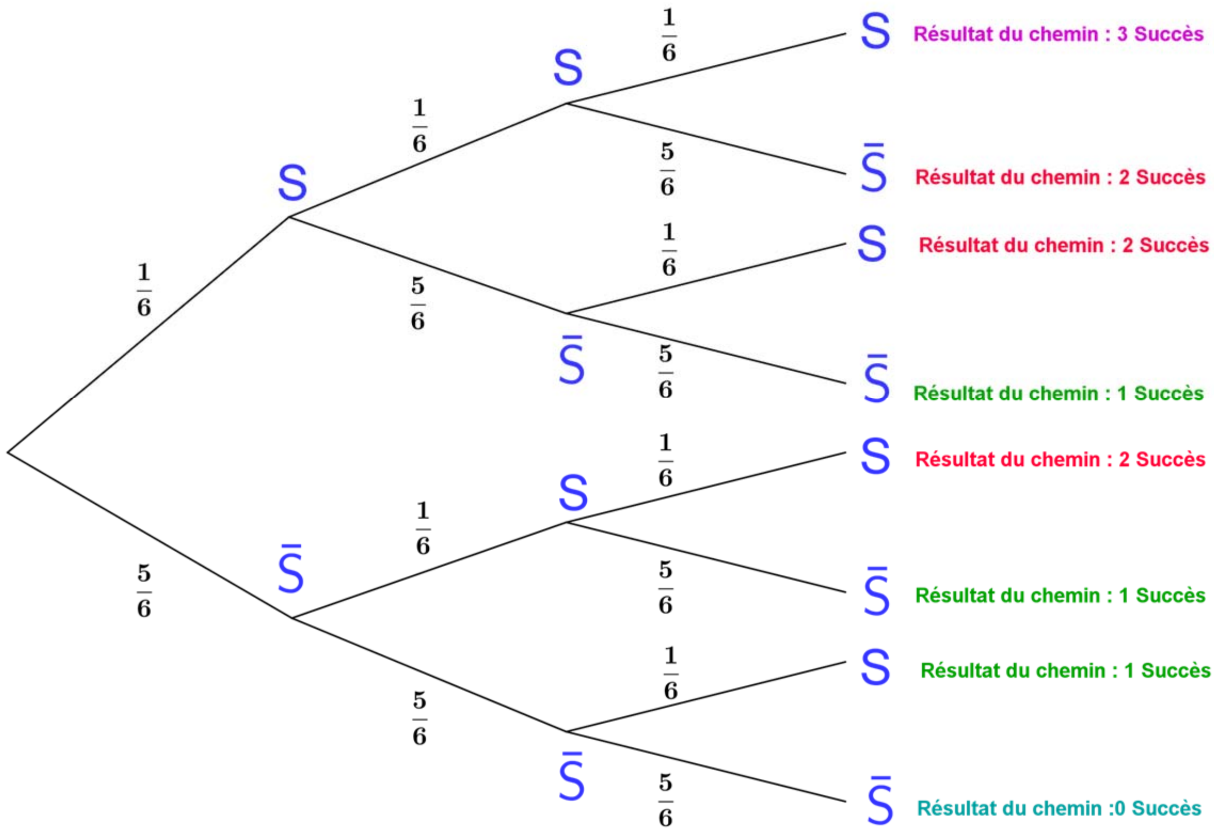
On lance 3 fois un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on s'intéresse à l'apparition de S : « obtenir un 1» c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1 - p = \frac{5}{6}$

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus au cours des trois lancers.

Les lancers étant identiques et indépendants X suit une loi binomiale de paramètres

n =3 et $p = \frac{1}{6}$ $\mathcal{B}(3\ ,\ \frac{1}{6})$

L'expérience peut être illustrée par l'arbre ci-dessous :
La loi suivie



La loi suivie par $\boldsymbol{X}$ est la suivante :

$P(X = 0) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

$P(X = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$

$P(X = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{15}{216}$

$P(X = 3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

2) Espérance, Ecart type

L'espérance de la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p est E(X) = np et son écart type est
σ(X) = $\sqrt{np(1-p)}$

Exemples

Dans l'exemple 1) précédent

E(X) = $10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} \approx 1{,}67$ et σ (X) = $\sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}18$

Dans l'exemple 2) précédent

E(X) = $9 \times 0{,}4 = 3{,}6$ et σ (X) = $\sqrt{9 \times 0{,}4 \times 0{,}6} = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}47$

Dans l'exemple 3) précédent

E(X) = $3 \times \frac{1}{6} = 0{,}5$ et σ (X) = $\sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{15}{36}} \approx 0{,}65$

3) Représentation graphique d'une loi binomiale

Exemple :

On considère un paquet de cartes contenant 3 cœurs et 7 piques, on effectue
100 tirages d'une carte en remettant à chaque fois la carte dans le paquet. A l'aide du tableur, on veut déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence d'une carte de cœur dans l'échantillon prélevé.

Solution :

Le nombre X de cartes de cœur suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (100 ; 0,3)
Ci-dessous une copie d'écran du tableur avec les valeurs prises par la variable X et l'histogramme représentant cette loi :

k	P(X=k)
1	1,3862E-14
2	2,94073E-13
3	4,11703E-12
4	4,27877E-11
5	3,52081E-10
6	2,38912E-09
7	1,37497E-08
8	6,85027E-08
9	3,00107E-07
10	1,17042E-06
11	4,10406E-06
12	1,30451E-05
13	3,7845E-05
14	0,000100791
15	0,000247659
16	0,000563866
17	0,001194068
18	0,002359706
19	0,004364569
20	0,007575645
21	0,0123684
22	0,019034486
23	0,027665029
24	0,038039414
25	0,049559923
26	0,061269135
27	0,071966921
28	0,080412019
29	0,085561557
30	0,086783865
31	0,083984385
32	0,07761057
33	0,068539205
34	0,05788395
35	0,046779682
36	0,036198564
37	0,026834457
38	0,019066588
39	0,012990422
40	0,008490169
....	......