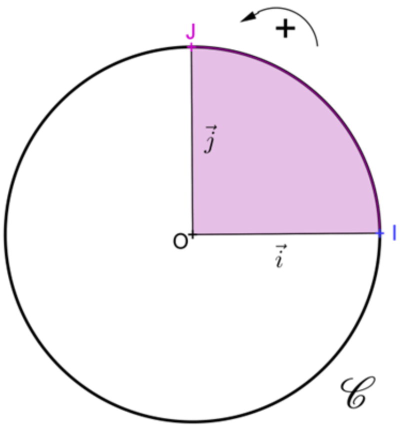
Cercle trigonométrique et mesures d'angles

I) Le cercle trigonométrique

Définition :

Le cercle trigonométrique de centre O est un cercle qui a pour rayon 1 et qui est muni d'un sens direct : le sens inverse des aiguilles d'une montre.



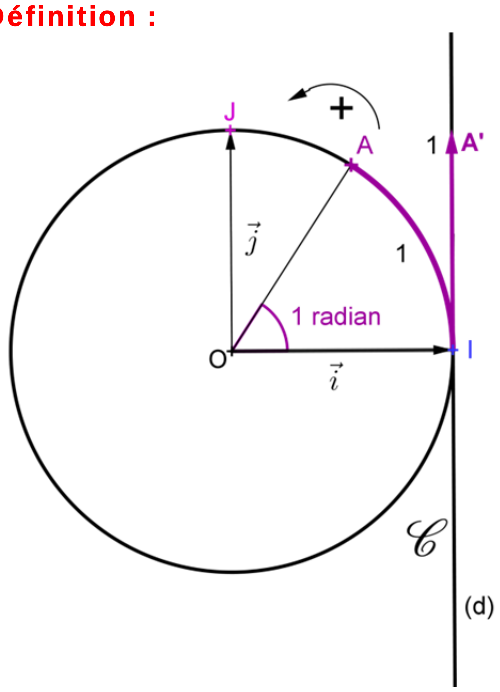
Le point J est placé pour que $\widehat{IOJ}$ soit positif comme sur la figure ci-contre.

Remarque : L'arc $\overset{\frown}{IJ}$ inclus dans le secteur angulaire saillant $\widehat{IOJ}$ (colorié en violet) est parcouru dans le sens positif.

Le sens positif du cercle trigonométrique correspond au sens de rotation de la terre.

II) Enroulement de la droite autour du cercle trigonométrique. Le radian

Définition :

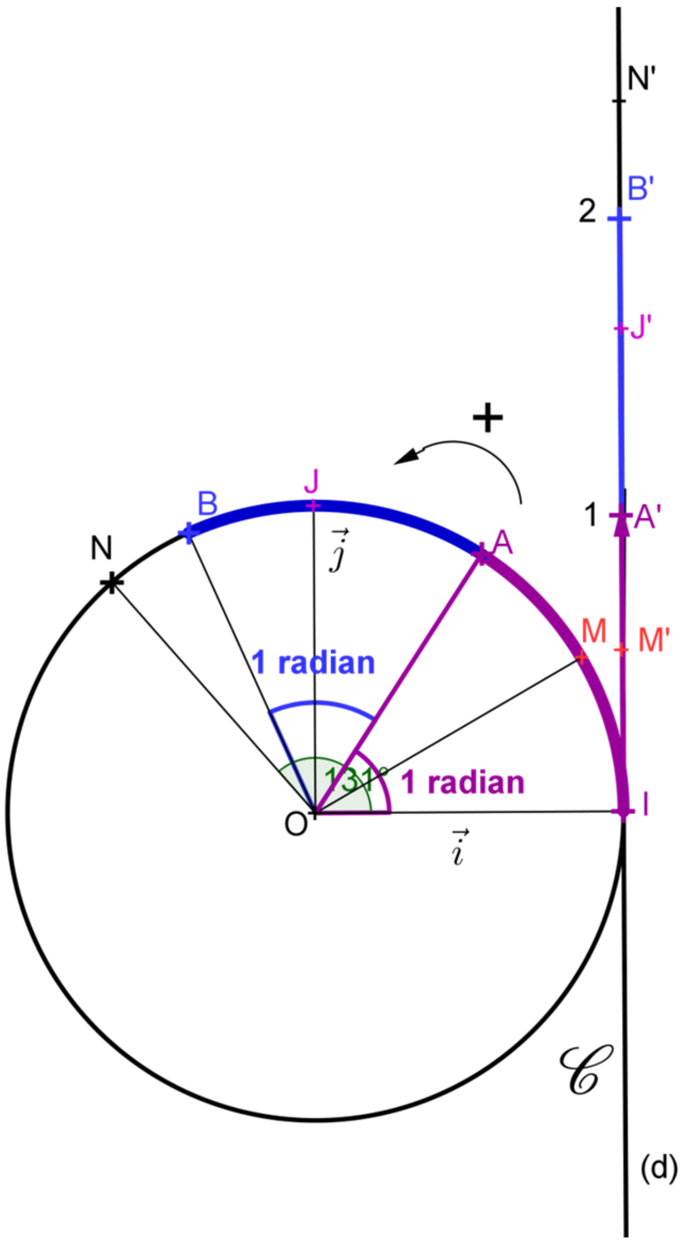


• Soit ($\mathscr{C}$) le cercle trigonométrique et (d) la tangente en I à ce cercle (voir la figure ci-contre) .

• On munit (d) d'un repère (I, $\overrightarrow{IA'}$) où $\overrightarrow{IA'} = \vec{j}$. Le rayon de ce cercle (qui, dans notre cas est 1) est aussi l'unité de longueur sur la droite (d). Cela permet de graduer la droite (d), puis le cercle $\mathscr{C}$.

La graduation de A' est donc 1. Il lui correspond, par enroulement sur le cercle le point A : par conséquent l'arc $\overset{\frown}{IA}$ mesure aussi 1 unité (qui est le rayon du cercle)

Par définition, l'angle $\widehat{IOA}$ a pour mesure 1 radian.

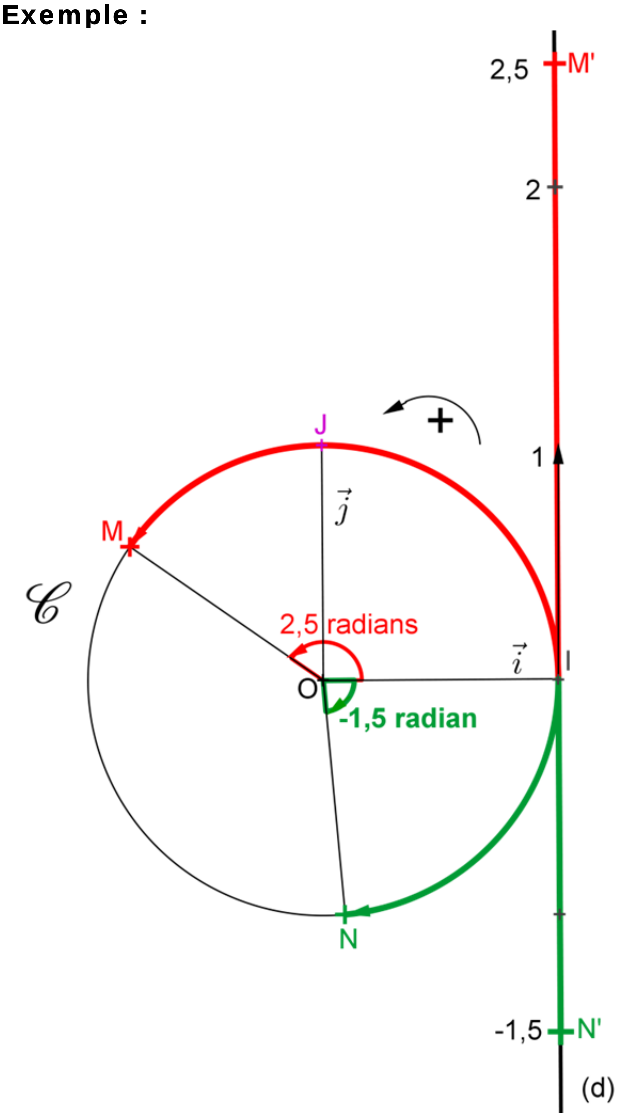


En enroulant cette droite (d) autour du cercle ($\mathscr{C}$) nous obtenons aussi une correspondance entre le point M' de la droite (d) et un unique point M du cercle ($\mathscr{C}$), de la même manière le point N' de la droite (d) se superpose au point N et ainsi de suite……

Plaçons le point B' sur la droite (d) de graduation 2. A'B' est donc aussi égal à 1 (IA' = A'B' = 1) et toujours par enroulement de la droite (d) autour du cercle , l'angle $\widehat{AOB}$ mesure aussi 1 radian.

III) Angles orientés

Exemple :



Le point M' de graduation 2,5 sur la droite orientée se retrouve après enroulement **dans le sens positif** de la droite (d) sur($\mathscr{C}$) en M tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est égale à la longueur IM' c'est-à-dire l'arc $\overset{\frown}{IM}$ mesure 2,5 et l'angle $\widehat{IOM}$ mesure 2,5 radians.

De même le point N' de graduation **-**1,5 sur la droite orientée se retrouve après enroulement dans **le sens négatif (ou rétrograde)**de la droite (d) sur ($\mathscr{C}$) en N tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IN}$ est égal à la longueur IN', c'est-à-dire l'arc $\overset{\frown}{IN}$ mesure 1,5 et l'angle $\widehat{ION}$ mesure **-**1,5 radians (sens négatif)

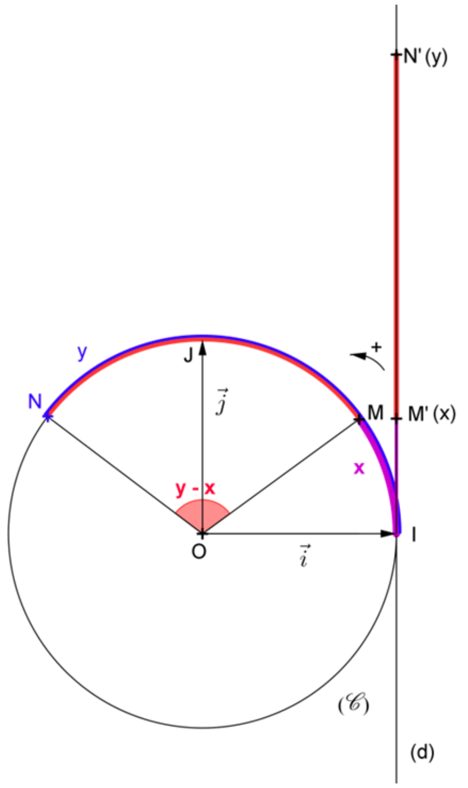
Remarque et définition :

Les mesures d'angles sont donc positives ou négatives. On parle alors d'angles orientés : On notera l'angle $\widehat{IOM}$ sous la forme $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$ dans le cas où il est dans le sens positif et $(\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{OI})$ dans le cas où son sens est négatif.

Et on a donc : $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}) = -\,(\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{OI})$

IV) Mesure d'un angle quelconque

On considère le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) et la tangente (d) en I (voir dessin ci-dessous).
On munit (d) d'un repère (I ; $\vec{j}$).



1) Propriété :

Pour tous nombres réels x et y,
l'angle $\widehat{MON}$ mesure $y - x$ radian(s)

Remarque : Ce n'est pas la seule mesure de cet angle.

Tout point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de nombres réels.
Si x est l'un d'entre eux, les autres nombres réels sont de la forme $x + 2\pi \times k$ où $k \in \mathbb{Z}$

Associer un point du cercle à un nombre réel, c'est-à-dire à un point de la droite, revient à enrouler la droite sur le cercle.
Si a et a' sont deux nombres réels qui ont la même image sur le cercle, alors l'enroulement de la droite sur le cercle de a à a' correspond à un nombre entier k de tours du cercle.
Le périmètre du cercle étant 2π , k tours du cercle correspondent $2\pi \times k$ on a donc :
a' = a + $2\pi \times k$ ($k \in \mathbb{Z}$) **.**

Lorsque k est positif, alors, pour obtenir la valeur a à partir de a', on a enroulé la droite dans le sens positif et lorsque k négatif , alors on a enroulé la droite dans le sens négatif.

2) Définition:

Quelque soit les réels x et y donnés, les mesures de l'angle $\widehat{MON}$ sont : $y-x+2\pi\times k$ où k est un entier relatif.

On note : $(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = y-x+2\pi\times k\ \ (k\in\mathbb{Z})$ ou

$(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = y-x\ (2\pi)$

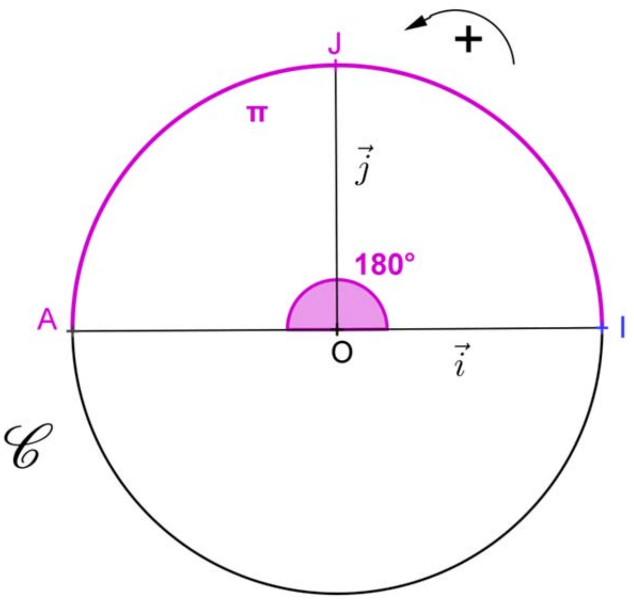
Exemple :

Les angles $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{-5\pi}{3}$ et tous les angles de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k\in\mathbb{Z})$ ont le même point image sur le cercle ($\mathscr{C}$)

$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}$

V) Relation entre radians et degré

Le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) a pour périmètre 2π .
La longueur du demi-cercle est donc π.
L'angle correspondant à un demi-tour est de 180°.
Donc π radians correspond à 180°



Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés. D'où le tableau de proportionnalité :

Degré °	180°	90°	60°	45°	30°
Radians	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Remarque: Un angle de 1 radian a pour mesure en degré environ 57,3° : $\frac{180}{\pi} \approx 57,3°$

VI) Mesure principale d'un angle

1) Définition:

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle]-π ; π] elle s'appelle la mesure principale de cet angle.

Exemples : Déterminer la mesure principale de : $\frac{29\pi}{6}$; $\frac{193\pi}{3}$ et $-\frac{13\pi}{6}$

$\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\times 2\pi$. La mesure principale de cet angle est $\frac{5\pi}{6}$.

$\frac{193\pi}{3} = \frac{192\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 64\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 32\times 2\pi$ .La mesure principale de cet angle est $\frac{\pi}{3}$.

$-\frac{13\pi}{6} = \frac{-12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\pi$. La mesure principale de cet angle est $-\frac{\pi}{6}$.

2) Angles de référence en radian :