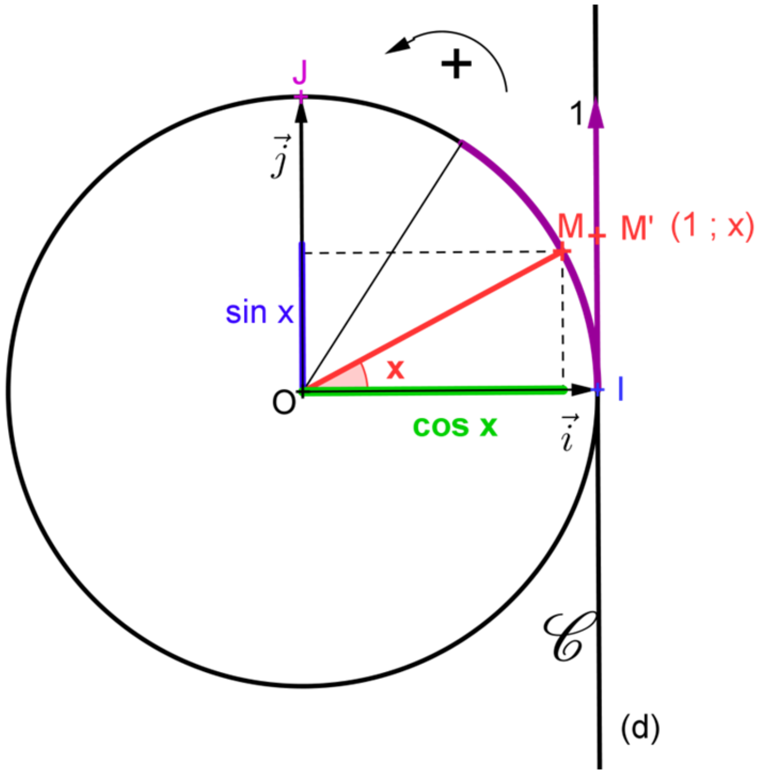
Cosinus et sinus d'un nombre réel

I) Définition

Soit x un nombre réel. On considère le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) et la tangente (d) en I. On munit (d) d'un repère (I ; $\vec{j}$). (voir figure ci-dessous)
Par enroulement de la droite (d) sur le cercle ($\mathscr{C}$), M'(1 ; x) a pour image M.

Définition :

Les coordonnées du point M sont : (cos x ; sin x)
Les cosinus de x noté cos x est l'abscisse du point M.
Le sinus de x noté sin x est l'ordonnée du point M.

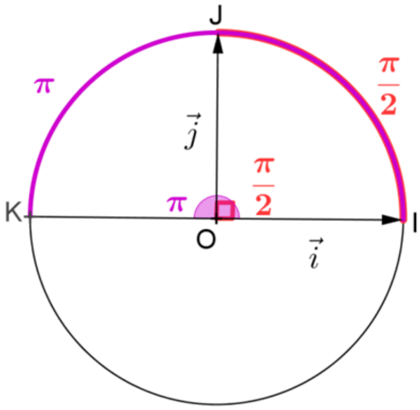


Exemples :
Le nombre $\frac{\pi}{2}$ a pour image le point J de coordonnées (0 ; 1)

donc cos $\frac{\pi}{2}$ = 1 et sin $\frac{\pi}{2}$ = 0

Le nombre π a pour image le point K de coordonnées (-1 ; 0)

donc cos π = -1 et sin π = 0



II) Propriétés :

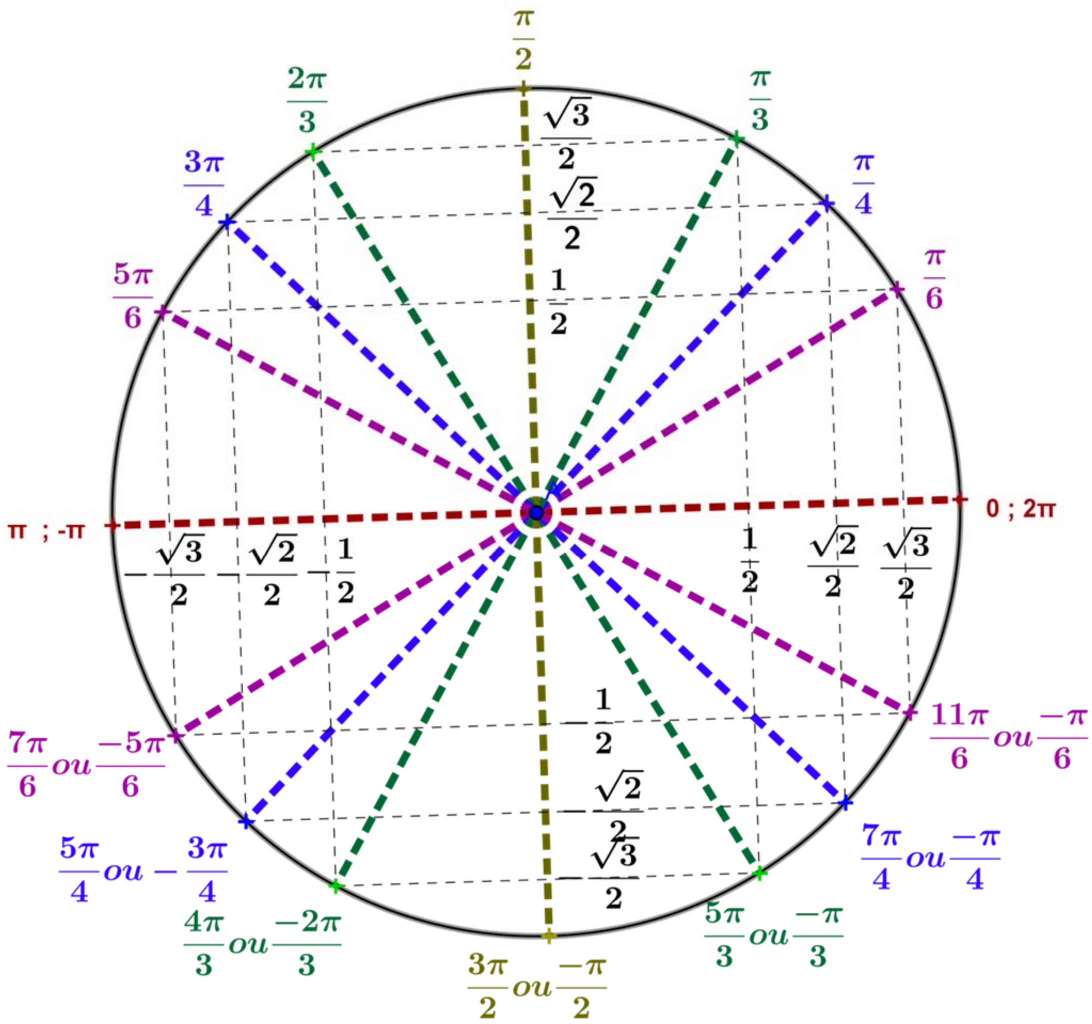
Pour tout nombre réel x et tout nombre entier relatif k :

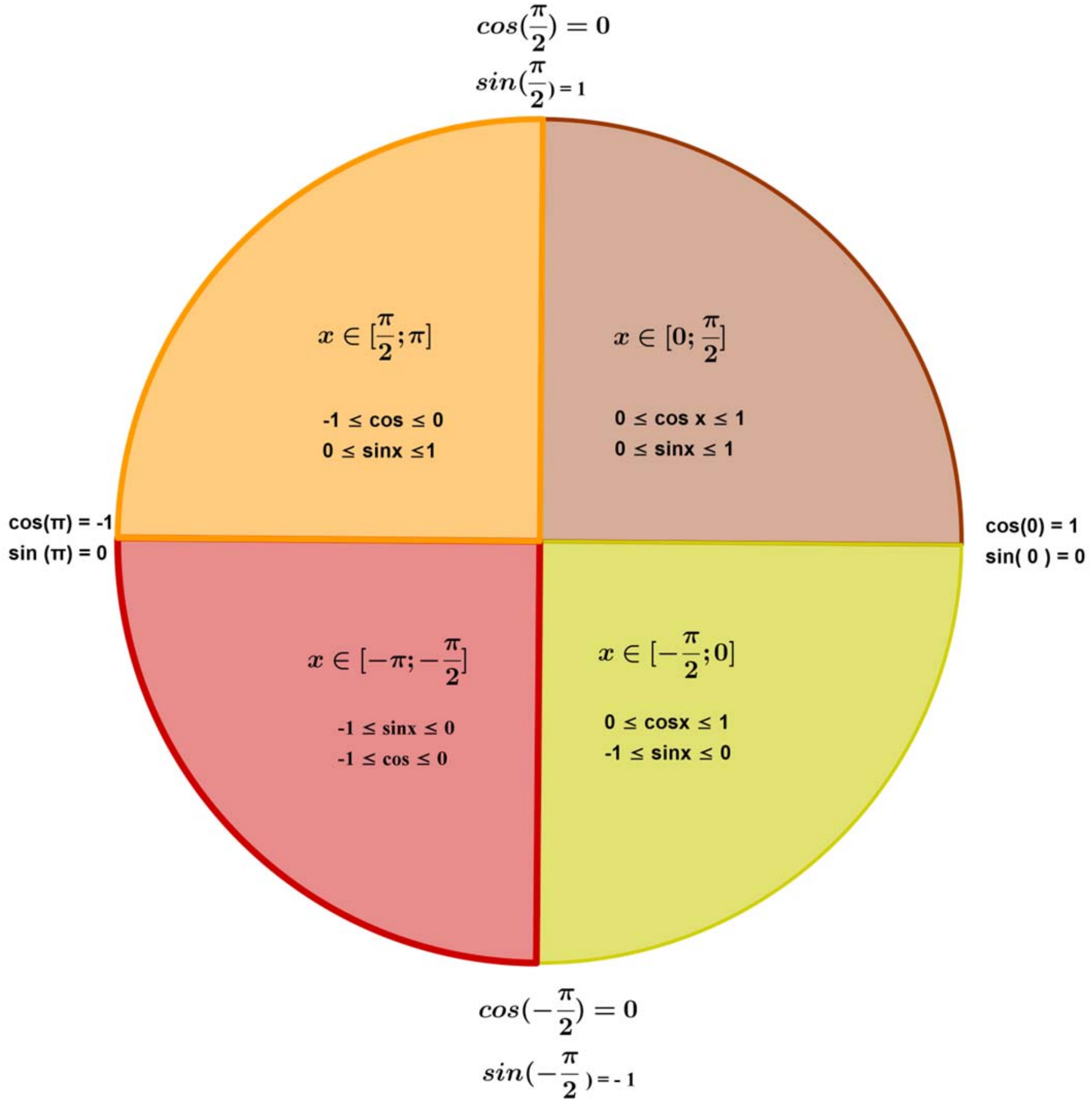
- **-1 $\leq$ cos x $\leq$ 1** **-1 $\leq$ sin x $\leq$ 1**
- **cos $(x + 2k\pi)$ = cos x** **sin $(x + 2k\pi)$ = sin x**
- **cos² x + sin² x = 1**

III) Tableau des valeurs à connaitre

x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*	*0*

Valeurs usuelles sur le cercle trigonométrique :

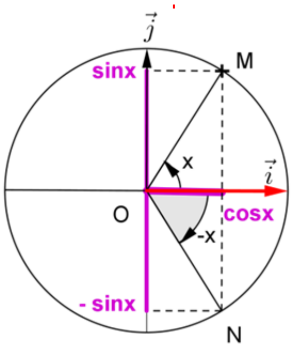



$cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$sin(\frac{\pi}{2})$ = 1
$x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$
-1 ≤ cos ≤ 0
0 ≤ sinx ≤1
$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$
0 ≤ cos x ≤ 1
0 ≤ sinx ≤ 1
cos(π) = -1
sin (π) = 0
cos(0) = 1
sin(0) = 0
$x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}]$
-1 ≤ sinx ≤ 0
-1 ≤ cos ≤ 0
$x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$
0 ≤ cosx ≤ 1
-1 ≤ sinx ≤ 0
$cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$
$sin(-\frac{\pi}{2}$) = - 1

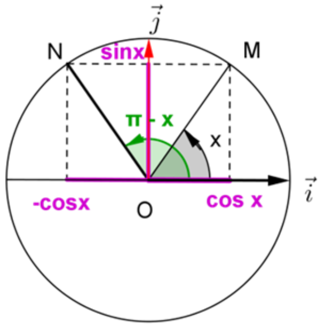
IV) Propriétés

1) Propriété 1 :

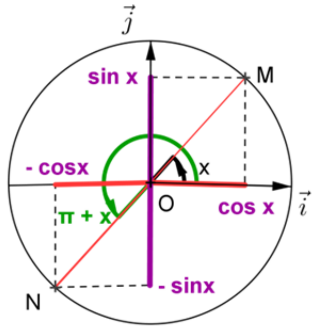
• **cos ($-x$) = cos x** **sin ($-x$) = -sin x**	• **cos $(\pi - x)$ = $-$ cos x** **sin $(\pi - x)$ = sin x**	• **cos $(\pi + x)$ = $-$ cos x** **sin $(\pi + x)$ = $-$ sin x**



M et N ont la même abscisse et les ordonnées opposées.



M et N ont la même ordonnée et les abscisses opposées.



M et N ont les abscisses et les ordonnées opposées.

Justification :

• Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Par symétrie on en déduit que : cos ($-x$) = cos x et sin ($-x$) = -sin x

• Les angles de mesures x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Par symétrie on en déduit que : cos $(\pi - x)$ = $-$ cos x et sin $(\pi - x)$ = sin x

• Les angles de mesures x et $x + \pi$ sont symétriques par rapport à l'origine. Par symétrie on en déduit que : cos $(\pi + x)$ = $-$ cos x et sin $(\pi + x)$ = $-$sin x

2) Propriété 2 :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

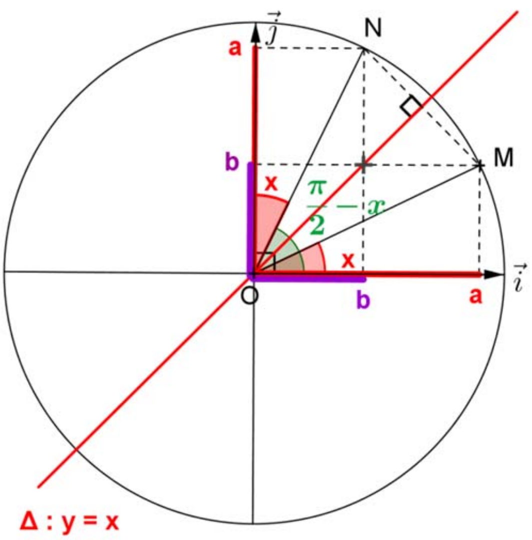
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

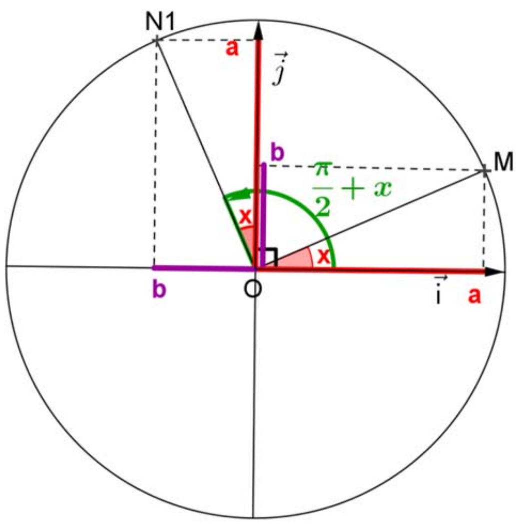
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Justification :

En notant $b = \sin x$ et $a = \cos x$





M et N sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$
Leurs coordonnées sont permutées :
L'abscisse de l'un et l'ordonnée de l'autre et vice-versa.

N_1 est le symétrique de N (de la figure ci-contre) par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = b = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -b = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a = \cos x$