Union et Intersection de sous-populations

I) Définitions

- **On appelle population un ensemble d'éléments .**
- **Toute partie (ou sous-ensemble) de cette population est appelée sous-population.**
- **Le nombre d'individus d'une population ou d'une sous-population est appelé son effectif.**
- **La proportion (ou fréquence) d'une sous-population A d'effectif n dans une population E d'effectif N est le nombre $\frac{n}{N}$**

Exemple : Une classe de 1re STMG est composée de 25 élèves dont 17 sont des filles.

La classe de première STMG est une population, chaque élève est un individu. L'effectif de la population E de cette classe est $n_E = 25$. Si A est la sous population des filles de celle classe alors son effectif est $n_A = 17$

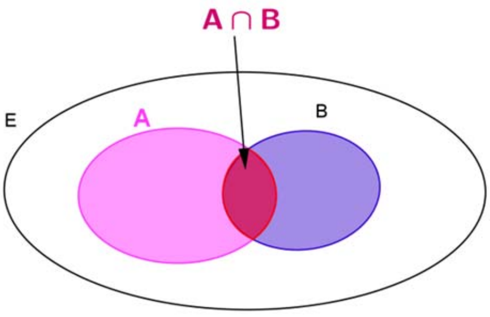
La proportion de fille dans cette classe est $p_A = \frac{17}{25}$

I) Intersection d'événements

1) Définition

A et B sont deux sous populations d'une même population E.

L'intersection de A et B est la sous-population noté A ∩ B constitués des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.



Exemples:

Un magasin propose deux fruits en promotion : des bananes et des pommes.

En observant les achats de 200 clients, le responsable du rayon fruits remarque :

• 86 clients ont acheté des pommes en promotion

• 114 clients ont acheté des bananes en promotion

• 52 ont profité des deux promotions

E est la population des 200 clients dont les achats ont été observés :

n_E = 200

A est la sous population des 86 clients ayant acheté des pommes en promotion :

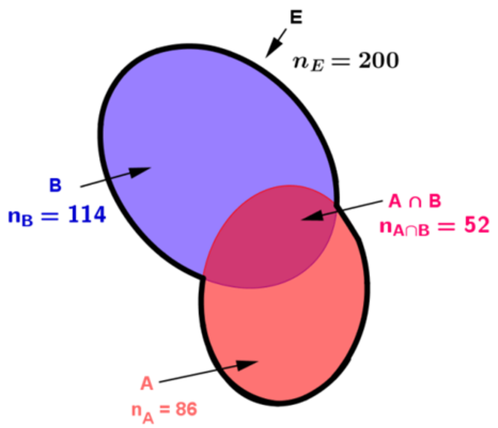
n_A = 86

B est la sous population des 114 clients ayant acheté des bananes en promotion :

n_B = 114

La sous population des 52 clients ayant profité des deux promotions, c'est-à-dire appartenant à **A et à B** : C'est l'intersection des sous population A et B

On a donc $n_{A\cap B}$ **= 52**

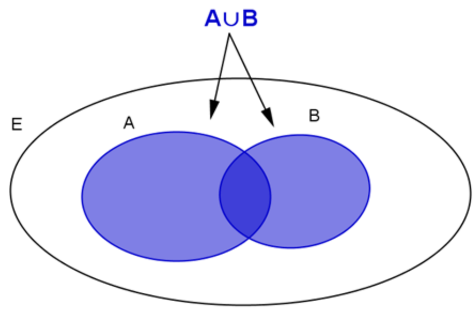


II) Réunion d'événements

1) Définition

A et B sont deux événements d'un même univers E.
A et B sont deux sous populations d'une même population E.

La réunion de A et B est la sous-population noté A ∪ B constitués des éléments qui appartiennent à A ou à B, , c'est à dire au moins à l'un des deux.



Exemple : Reprenons notre exemple précédent :

Un magasin propose deux fruits en promotion : des bananes et des pommes.

En observant les achats de 200 clients, le responsable du rayon fruits remarque :

• 86 clients ont acheté des pommes en promotion.

• 114 clients ont acheté des bananes en promotion.

• 52 ont profité des deux promotions.

E est la population des 200 clients dont les achats ont été observés :

n_E = 200

A est la sous population des 86 clients ayant acheté des pommes en promotion :

n_A = 86

B est la sous population des 114 clients ayant acheté des bananes en promotion :

n_B = 114

et $n_{A\cap B}$ **= 52**

• La sous-population des clients ayant acheté au moins un des deux fruits en promotions, c'est-à-dire appartenant à A ou à B est noté A ∪ B. Pour calculer son effectif, $\boldsymbol{n_{A\cup B}}$, on peut ajouter les effectifs de A et de B, mais les 52 clients qui ont profité des deux promotions **sont alors comptés deux fois** : une fois dans A , une fois dans B, il faut donc retrancher $\boldsymbol{n_{A\cap B}}$ à $\boldsymbol{n_A}$ + $\boldsymbol{n_B}$

$\boldsymbol{n_{A\cup B}}$ = 86 + 114 – 52 = 148

III) Propriété

Soit A et B deux sous-populations d'une même population E.
Les proportions de A, de B, de A ∪ B et de A ∩ B sont liées par la relation :
$\boldsymbol{p_{A\cap B} = p_A + p_B - p_{A\cup B}}$

Exemples :

Reprenons l'exemple précédent :

Un magasin propose deux fruits en promotion : des bananes et des pommes.

En observant les achats de 200 clients, le responsable du rayon fruits remarque :

• 86 clients ont acheté des pommes en promotion

• 114 clients ont acheté des bananes en promotion

• 52 ont profité des deux promotions

E est la population des 200 clients dont les achats ont été observés :

n_E = 200

A est la sous population des 86 clients ayant acheté des pommes en promotion :

$p_A = \frac{86}{200}$

B est la sous population des 114 clients ayant acheté des bananes en promotion :

$p_B = \frac{114}{200}$

En utilisant les résultats précédents on a :

$p_{A \cap B}$ **=** $\frac{52}{200}$ et comme :

$\boldsymbol{p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}}$

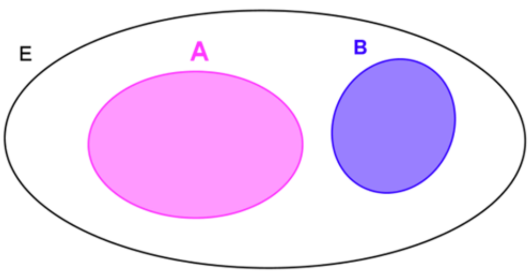
$\boldsymbol{p_{A \cup B}} = \frac{86}{200} + \frac{114}{200} - \frac{52}{200} = \frac{148}{200}$

$p_{A \cup B} = \frac{\mathbf{148}}{\mathbf{200}}$

IV) Sous population disjointe

1) Définition

Deux sous-populations A et B d'une même population E sont disjointes lorsqu'elles n'ont pas d'éléments communs:
A ∩ B = ∅



A et B n'ont aucun point commun

Remarques : Dans ce cas l'effectif $n_{A \cap B}$ est nul ainsi que la proportion $p_{A \cap B} = \frac{n_{A \cap B}}{n_E}$

Exemples :

Exemple 1 : Une classe de 1re STMG est composée de 25 élèves dont 17 sont des filles.

Si A est la sous-population des filles et B la sous-population des garçons. Alors A et B sont deux sous-populations disjointes.

Exemple 2: Dans une classe de 1re STMG de 25 élèves. La langue vivante 1 étudiée est l'anglais pour 15 élèves, l'espagnol pour 6 élèves et d'autres langues pour les 4 autres.

Soit A la sous-population des élèves de la classe ayant pris l'anglais comme LV1 et B la sous-population des élèves de la classe ayant pris l'espagnol comme LV1.

Les sous-population A et B n'ont aucun point commun , A et B sont deux sous-populations disjointes.

2) Propriété

Si A et B sont deux sous-populations disjointes d'une même population E:
$\boldsymbol{p_{A \cup B} = p_A + p_B}$

Exemple: Dans une classe de 1re STMG de 25 élèves. La langue vivante 1 étudiée est l'anglais pour 15 élèves, l'espagnol pour 6 élèves et d'autres langues pour les 4 autres.

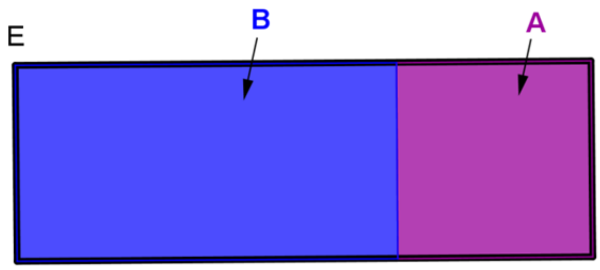
Soit A la sous-population des élèves de la classe ayant pris l'anglais comme LV1 et B la sous-population des élèves de la classe ayant pris l'espagnol comme LV1.

Les sous-population A et B n'ont aucun point commun , A et B sont deux sous-populations disjointes.

$p_{A \cup B} = p_A + p_B = \frac{15}{25} + \frac{6}{25} = \frac{21}{25}$

IV) Partition

Deux sous-populations A et B forment une partition d'une population E lorsque :
$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$



Exemple:

En reprenant un des exemples précédents :

Une classe de 1re STMG est composée de 25 élèves dont 17 sont des filles.

Si A est la sous-population des filles et B la sous-population des garçons. Alors A et B sont deux sous-populations disjointes. **$A \cap B = \emptyset$**

La proportion de filles dans la classe est : $p_A = \frac{17}{25}$

$n_B = 25 - 17 = 8$ donc : $p_B = \frac{8}{25}$

$p_{A \cup B} = p_A + p_B = \frac{17}{25} + \frac{8}{25} = 1$

$A \cup B = E$

A et B forment donc une partition d'une population E.