# Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

## I) Fonction dérivée d'une fonction polynome de degré deux

**Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ :**

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

**La fonction dérivée de $f$ , notée $f$', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$\boldsymbol{f'(x) = 2ax + b}$

**Exemples :**

**Exemple 1:**

Soit $f(x) = x^2 + x - 6$

Alors $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 1}$

**Exemple 2:**

Soit $g(x) = -x^2 + 5$

Alors $\boldsymbol{g'(x) = -2x}$

**Exemple 3:**

Soit $h(x) = 5x^2 - 3x - 6$

$h'(x) = 2 \times 5x - 3$

Alors $\boldsymbol{h'(x) = 10x - 3}$

**Exemple 4:**

Soit $i(x) = -7x^2 + 4x - 1$

$i'(x) = -7 \times 2x + 4$

Alors $\boldsymbol{i'(x) = -14x + 4}$

## II) Application à l'étude des variations d'une fonction

### 1) Théorème

**Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2:**

**• Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x$ d'un intervalle I, alors $f$ est croissante sur cet intervalle.**

**• Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x$ d'un intervalle I, alors $f$ est décroissante sur cet intervalle.**

**Exemples :**

**Exemple 1:**

Soit $f(x) = x^2 + x - 6$

Alors $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 1}$

$f'(x) = 0$ a pour solution $2x + 1 = 0$ soit $x = -\frac{1}{2}$

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $f'(x)$** | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}]$ donc $f$ est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$ sur $[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ donc $f$ est croissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $f'(x)$** | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-6{,}25$ | $\nearrow$ | |

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6{,}25$ (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)

**Exemple 2:**

Soit $g(x) = -x^2 + 5$

Alors $g'(x) = -2x$

$g'(x) = 0$ pour $-2x = 0$ soit $x = 0$

$g'(x) \geq 0$ sur$]-\infty\ ;\ 0\ ]$ donc $g$ est croissante sur cet intervalle

$g'(x) \leq 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $g$ est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $g'(x)$** | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | 5 | $\searrow$ | |

$g(0) = 5$

**Exemple 3:**

Soit $h(x) = -5x^2 + 3x - 6$

Alors $\boldsymbol{h'(x) = -10x + 3}$

$h'(x) = 0$ pour $-10x + 3 = 0$ soit $x = 0{,}3$

$h'(x) \geq 0$ sur$]-\infty\ ;\ 0{,}3\ ]$ donc $h$ est croissante sur cet intervalle

$h'(x) \leq 0$ sur $[\ 0{,}3\ ;\ +\infty\ [$ donc $h$ est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | | $0{,}3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $\boldsymbol{h'(x)}$** | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\boldsymbol{h(x)}$ | | $\nearrow$ | $-5{,}55$ | $\searrow$ | |

$h(0{,}3) = -5{,}55$ (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)