

Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

I) Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La fonction dérivée de f , notée f' , est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Exemples :

Exemple 1:

$$\text{Soit } f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\text{Alors } f'(x) = 2x + 1$$

Exemple 3:

$$\text{Soit } h(x) = 5x^2 - 3x - 6$$

$$h'(x) = 2 \times 5x - 3$$

$$\text{Alors } h'(x) = 10x - 3$$

Exemple 2:

$$\text{Soit } g(x) = -x^2 + 5$$

$$\text{Alors } g'(x) = -2x$$

Exemple 4:

$$\text{Soit } i(x) = -7x^2 + 4x - 1$$

$$i'(x) = -7 \times 2x + 4$$

$$\text{Alors } i'(x) = -14x + 4$$

II) Application à l'étude des variations d'une fonction

1) Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré 2:

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors f est croissante sur cet intervalle.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors f est décroissante sur cet intervalle.

Exemples :

Exemple 1:

Soit $f(x) = x^2 + x - 6$

Alors $f'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = 0$ a pour solution $2x + 1 = 0$ soit $x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+

$f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ donc f est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$ sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$ donc f est croissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		-6,25	

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6,25$ (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)

Exemple 2:

Soit $g(x) = -x^2 + 5$

Alors $g'(x) = -2x$

$g'(x) = 0$ pour $-2x = 0$ soit $x = 0$

$g'(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 0]$ donc g est croissante sur cet intervalle

$g'(x) \leq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ donc g est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		5	

$g(0) = 5$

Exemple 3:

Soit $h(x) = -5x^2 + 3x - 6$

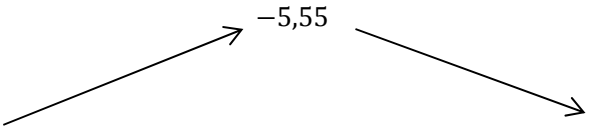
Alors $h'(x) = -10x + 3$

$h'(x) = 0$ pour $-10x + 3 = 0$ soit $x = 0,3$

$h'(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 0,3]$ donc h est croissante sur cet intervalle

$h'(x) \leq 0$ sur $[0,3 ; +\infty [$ donc h est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$0,3$	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

$h(0,3) = -5,55$ (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)