Suites arithmétiques

I) Définition:

n_0 et n sont deux nombres entiers naturels.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est arithmétique si, partant du

TERME INITIAL u_{n_0}, pour passer d'un terme au suivant, on

AJOUTE toujours le même nombre appelé RAISON

Exemple : Pour un abonnement internet illimité, un opérateur propose les prix suivants : 40 € de frais d'établissement de ligne et 30 € par mois d'abonnement.

• Le budget total pour un mois d'abonnement est : 40 + 30 = 70
Le budget total pour un mois d'abonnement est de 70 €

• Le budget total pour deux mois d'abonnement est: 70 + 30 = 100
Le budget total pour deux mois d'abonnement est 100 €

• Le budget total pour trois mois d'abonnement est: 100 + 30 = 130
Le budget total pour un trois d'abonnement est de 130 €

Et ainsi de suite ……..On additionne 30 au prix du budget total du mois précédent pour obtenir celui du mois suivant

Soit u_1 le budget total pour un mois d'abonnement: u_1 = 70

u_2 est le budget total pour deux mois d'abonnement: u_2 = u_1 **+ 30** = 70 + 30 = 100

u_3 est le budget total pour trois mois d'abonnement: u_3 = u_2 **+ 30** = 100 + 30 = 130

Soit u_n le budget total pour n mois d'abonnement: $u_n = u_{n-1}$ **+ 30**

Cette suite est arithmétique : On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours par le même nombre (dans notre cas 30)

II) Formule de calculs de termes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et $n \geq 0$, un entier naturel.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur appelée raison :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemples :

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

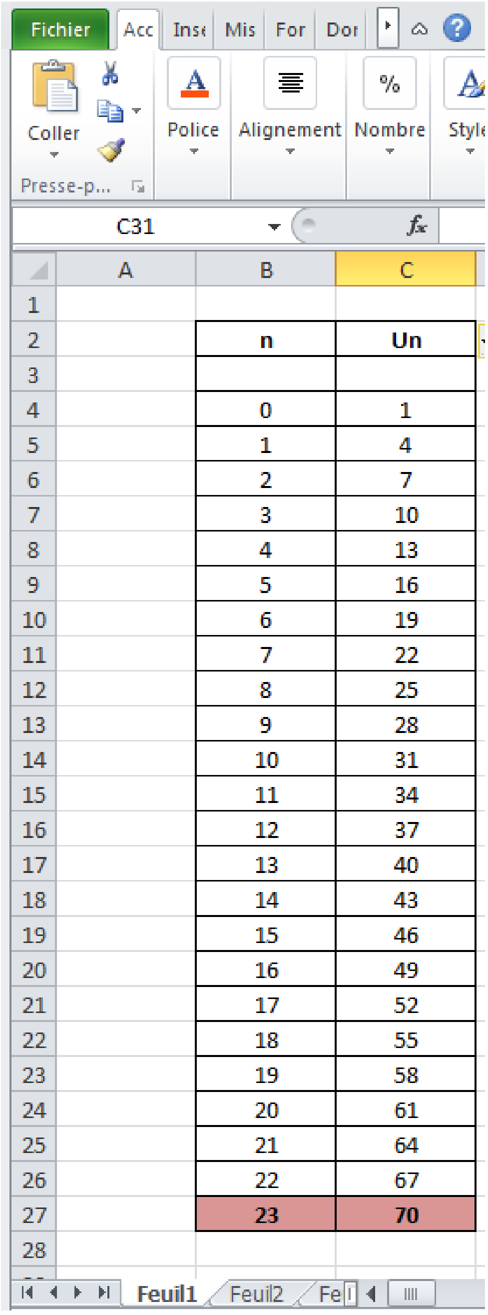
2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{23}

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite est donc arithmétique de raison 3 et de 1er terme 1 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois 3).

2) $u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ $\quad$ $\boldsymbol{u_1 = 4}$
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$ $\quad$ $\boldsymbol{u_2 = 7}$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$ $\quad$ $\boldsymbol{u_3 = 10}$

3) En utilisant un tableur, on calcule u_{23} :



n	Un
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
7	22
8	25
9	28
10	31
11	34
12	37
13	40
14	43
15	46
16	49
17	52
18	55
19	58
20	61
21	64
22	67
23	**70**

u_{23} = 70

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

u_{n+1} = u_n - 2 et $\boldsymbol{u_1}$ = 5

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

Réponse :

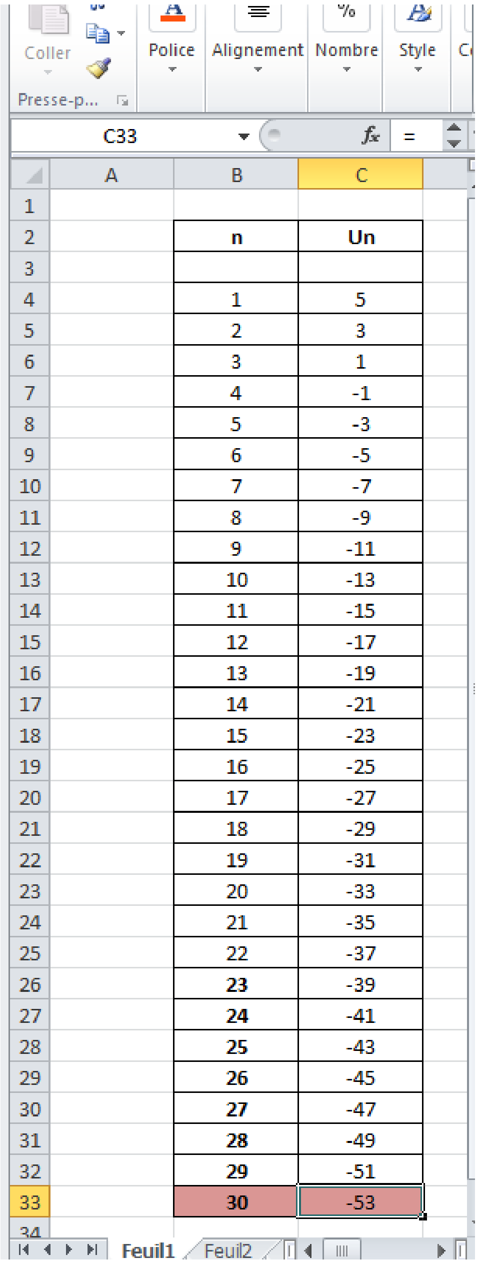
1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1} - u_n = -2. La suite est donc arithmétique de raison -2 et de 1er terme 5 (Pour passer d’un terme au suivant on ajoute à chaque fois -2).

2) $u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ $\boldsymbol{u_2 = 3}$

$u_3 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1$ $\qquad$ $\boldsymbol{u_3 = 1}$

$u_4 = u_3 - 2 = 1 - 2 = -1$ $\qquad$ $\boldsymbol{u_4 = -1}$

3) En utilisant un tableur, on calcule u_{30} :



n	Un
1	5
2	3
3	1
4	-1
5	-3
6	-5
7	-7
8	-9
9	-11
10	-13
11	-15
12	-17
13	-19
14	-21
15	-23
16	-25
17	-27
18	-29
19	-31
20	-33
21	-35
22	-37
23	-39
24	-41
25	-43
26	-45
27	-47
28	-49
29	-51
30	-53

$u_{30} = -53$

III) Sens de variation des suites arithmétiques

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r

- **Si r > 0, alors (u_n) est strictement croissante.**
- **Si r < 0, alors (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si r = 0, alors (u_n) est constante.**

Exemples:

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

Réponse :

La raison r de cette suite numérique est positive, **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.**

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n - 2$ et $\boldsymbol{u_1} = 5$

Réponse :

La raison r de cette suite numérique est négative, **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.**

IV) Graphique.

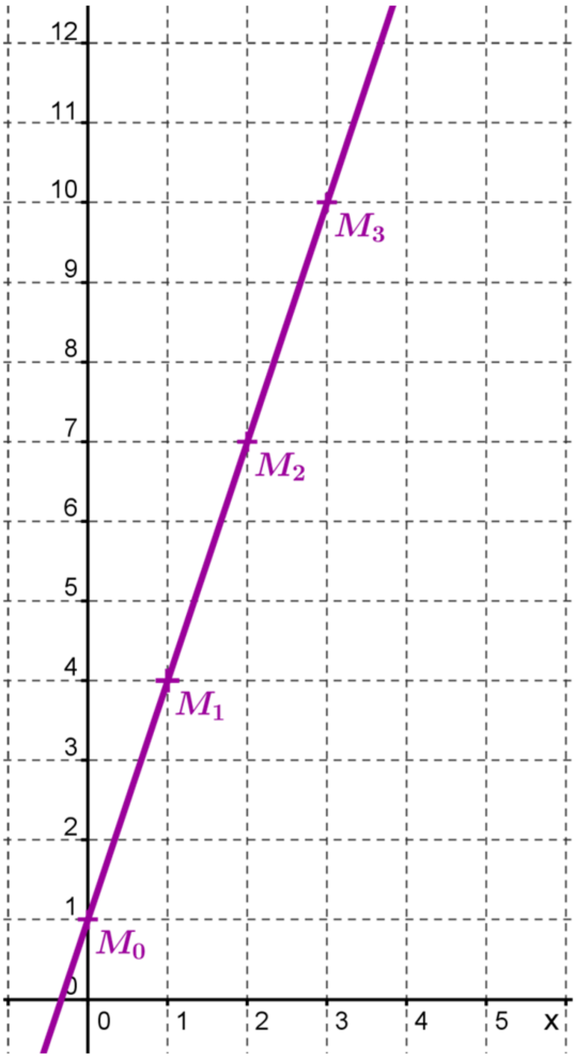
La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés, et cela la caractérise.

Exemples:

Exemple 1 :

Représenter graphiquement la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

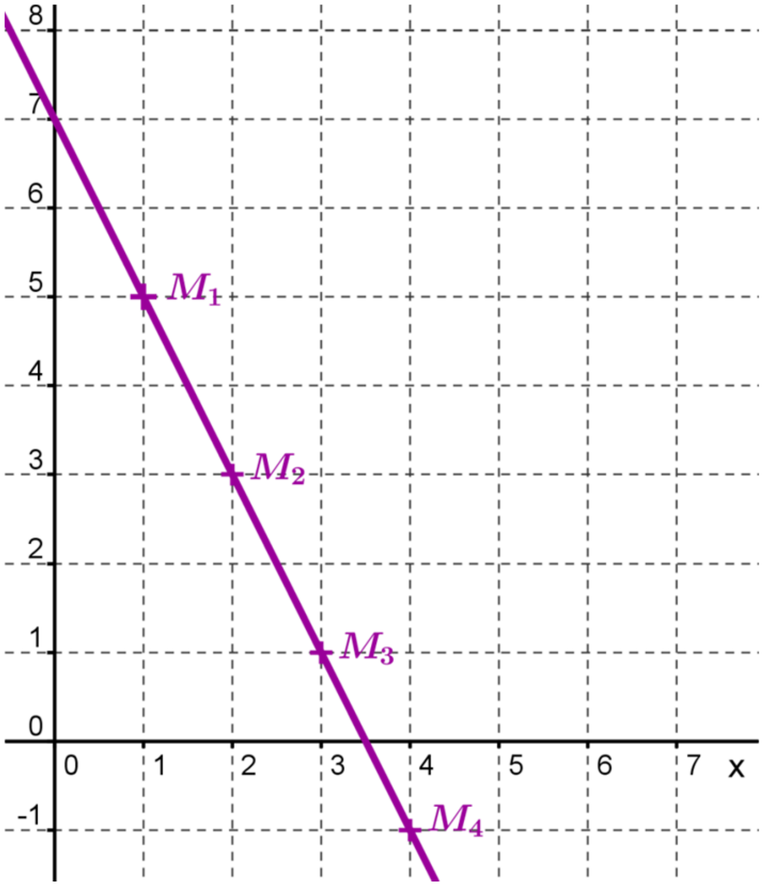


Remarque : La raison r de cette suite numérique est positive, **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est donc strictement croissante.**

Exemple 2 :

Représenter graphiquement la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

u_{n+1} = u_n - 2 et $\boldsymbol{u_1}$ = 5



La raison r de cette suite numérique est négative, **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.**