# Suites géométriques

## I) Définition

**$n_0$ et $n$ sont deux nombres entiers naturels.**

**Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du**

**TERME INITIAL $u_{n_0}$, pour passer d'un terme au suivant, on**

**MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON**

**Exemple:** Une voiture, achetée neuve coûtait 20 000 € (en 2008), perd chaque année 20%
de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :
$20\ 000 \times (1 - \frac{20}{100}) = 20\ 000 \times \mathbf{0,8} = 16\ 000$. En 2009 la voiture coûtera 16 000 €.

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur : $16\ 000 \times (1 - \frac{20}{100}) = 16\ 000 \times \mathbf{0,8} = 12\ 800$. En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur : $12\ 800 \times (1 - \frac{20}{100}) = 12\ 800 \times \mathbf{0,8} = 10\ 240$. En 2011 la voiture coûtait 10 240.€.

Et ainsi de suite … on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit $u_0$ la valeur de la voiture en 2008. $u_0 = 20\ 000$

$u_1$ est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire $u_1 = u_0 \times \mathbf{0,8} = 16\ 000$

$u_2$ est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire $u_2 = u_1 \times \mathbf{0,8} = 12\ 800$

Soit $u_n$ la valeur de la voiture au bout de $n$ années, $u_n = u_{n-1} \times \mathbf{0,8}$

**Cette suite est géométrique** : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre (dans notre cas 0,8)

# II) Formule de calculs de termes

**Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison q et $n \geq 0$, un entier naturel.**

**On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur $q$ appelée raison:**

$$u_{n+1} = u_n \times q$$


**Exemples :**

**Exemple 1 :** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par: $u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer $u_1$ ; $u_2$ ; $u_3$ puis $u_{15}$

**Réponse :**

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$ . On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3 , la suite est donc géométrique de raison 3 et de 1$^{er}$ terme 2

2) $u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ **$u_1$ = 6**

$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$ **$u_2$ = 18**

$u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ **$u_3$ = 54**

3) En utilisant un tableur, on calcule $u_{15}$ :

F34 Zone Nom

| n | Un |
|---|---|
| | |
| 0 | 2 |
| 1 | 6 |
| 2 | 18 |
| 3 | 54 |
| 4 | 162 |
| 5 | 486 |
| 6 | 1458 |
| 7 | 4374 |
| 8 | 13122 |
| 9 | 39366 |
| 10 | 118098 |
| 11 | 354294 |
| 12 | 1062882 |
| 13 | 3188646 |
| 14 | 9565938 |
| 15 | 28697814 |

Feuil1 Feuil2

**$u_{15}$ = 28 697 814**

**Exemple 2 :** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par:

$\boldsymbol{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{2}$ et $u_1 = 3$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer $u_2$ ; $u_3$ ; $u_4$ puis $u_{30}$

**Réponse :**

1) Pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1}{2}$ . On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\dfrac{1}{2}$ .La suite est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme 3 .

2) $u_2 = \dfrac{u_1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ $\qquad$ $\boldsymbol{u_2} = \mathbf{1{,}5}$

$u_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ $\qquad$ $\boldsymbol{u_3} = \mathbf{0{,}75}$

$u_4 = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{0{,}75}{2} = 0{,}75$ $\qquad$ $\boldsymbol{u_4} = \mathbf{0{,}375}$

3) En utilisant un tableur, on calcule $u_{30}$ :

Presse-p...

C37 Nombre

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | n | Un |
| 3 | | | |
| 4 | | 1 | 3 |
| 5 | | 2 | 1,5 |
| 6 | | 3 | 0,75 |
| 7 | | 4 | 0,375 |
| 8 | | 5 | 0,1875 |
| 9 | | 6 | 0,09375 |
| 10 | | 7 | 0,046875 |
| 11 | | 8 | 0,0234375 |
| 12 | | 9 | 0,01171875 |
| 13 | | 10 | 0,00585938 |
| 14 | | 11 | 0,00292969 |
| 15 | | 12 | 0,00146484 |
| 16 | | 13 | 0,00073242 |
| 17 | | 14 | 0,00036621 |
| 18 | | 15 | 0,00018311 |
| 19 | | 16 | 9,1553E-05 |
| 20 | | 17 | 4,5776E-05 |
| 21 | | 18 | 2,2888E-05 |
| 22 | | 19 | 1,1444E-05 |
| 23 | | 20 | 5,722E-06 |
| 24 | | 21 | 2,861E-06 |
| 25 | | 22 | 1,4305E-06 |
| 26 | | 23 | 7,1526E-07 |
| 27 | | 24 | 3,5763E-07 |
| 28 | | 25 | 1,7881E-07 |
| 29 | | 26 | 8,9407E-08 |
| 30 | | 27 | 4,4703E-08 |
| 31 | | 28 | 2,2352E-08 |
| 32 | | 29 | 1,1176E-08 |
| 33 | | 30 | 5,5879E-09 |

$\boldsymbol{u_{30}} = \mathbf{5{,}5879} \times \mathbf{10^{-9}}$

## III) Sens de variation d'une suite géométrique

**Remarque : Les suites géométriques étudiées sont de raison q strictement positive et de terme initial positif, donc tous les termes sont strictement positifs.**

**Propriété:**

**Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q$ ($q > 0$) et de 1[er] terme $u_0 > 0$ :**

| | $0 < q < 1$ | $q > 1$ | $q = 1$ |
|---|---|---|---|
| $u_0 > 0$ | **$(u_n)$ est strictement décroissante.** | **$(u_n)$ est strictement croissante.** | **$(u_n)$ est constante.** |
| $u_0 = 0$ | **$(u_n)$ est une suite nulle** | | |

**Exemple 1:**

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

**Réponse :**

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $3 > 1$

**La suite $(u_n)$ est donc strictement croissante.**

**Exemple 2 :**

Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$ et $u_0 = 2$

**Réponse :**

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$

la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$

**La suite $(u_n)$ est donc strictement décroissante.**

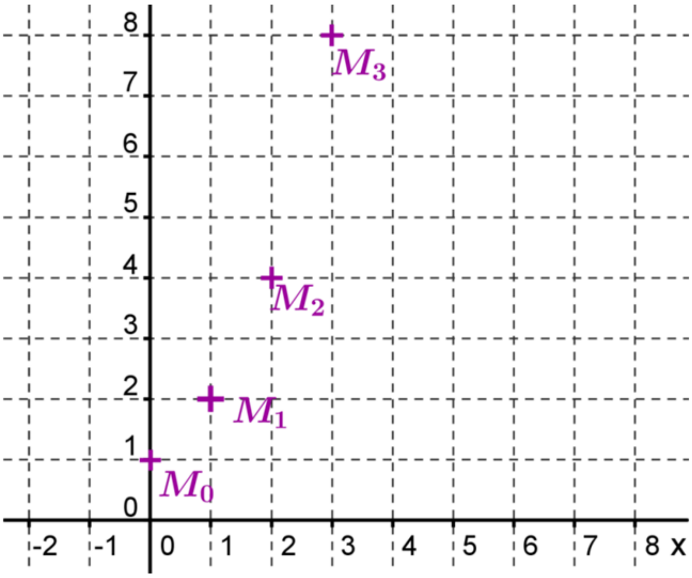
## IV) Exemples de graphique

**Exemples :**

**Exemple 1:**

Faire le graphique de la suite $(u_n)$ définie par :

$u_{n+1} = u_n \times 2$ et $u_0 = 1$

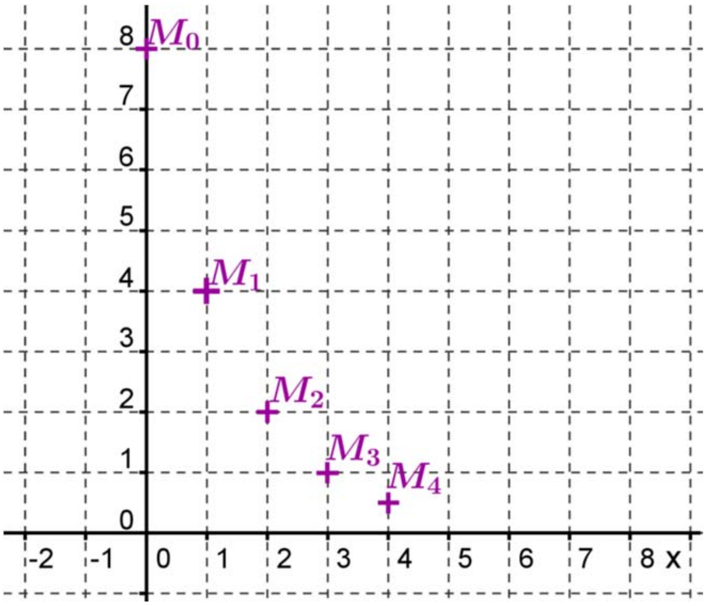



**Remarque :** on voit sur le graphique que la suite $(u_n)$ est strictement croissante (q>1)

**Exemple 2:**

Faire le graphique de la suite $(u_n)$ définie par :

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ et $u_0 = 8$




**Remarque :** on voit sur le graphique que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante (0< q< 1)