Suites numériques

I) Modes de génération d'une suite numérique

1) Définitions et notations :

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) = u_n \end{array}$$

- **u_n est le terme de rang n (ou indice n)**
- **On note aussi (u_n) la suite dont le terme de rang n est u_n.**
- **Le premier terme u_0 de la suite est la valeur initiale de la suite.**

Remarque : Une suite (u_n) peut n'être définie qu'à partir d'un rang 1. Dans ce cas, la suite est définie dans $\mathbb{N}^*$ et sa valeur initiale est u_1

Exemple 1 : On définit la suite (u_n) par: $u_n = \dfrac{1}{n}$

Cette suite est définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire pour tout entier naturel $n \geq 1$

u est une application de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^+$

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \\ n \mapsto \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Son premier terme est u_1

$u_1 = \dfrac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $u_2 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $u_3 = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ etc ....

Exemple 2 : On définit la suite (u_n) par: $u_n = \dfrac{1}{n-3}$ pour les entiers naturels strictement supérieur à 3

Cette suite est définie pour tout $n \geq 3$, u est une application de l'ensemble:

$\{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq 3\}$ vers $\mathbb{R}^+$

Son premier terme est u_4

$u_4 = \dfrac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $u_5 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $u_6 = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ etc ....

Exemple 3 : On définit la suite (u_n) par: $u_n = \frac{1}{n+1}$

Cette suite est définie sur $\mathbb{N}$

u est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}^+$

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$$
$$n \mapsto \frac{1}{n+1}$$

Son premier terme est u_0

$u_0 = \frac{1}{1} = 1$ $\quad u_1 = \frac{1}{2}$ $\quad u_2 = \frac{1}{3}$ $\quad$ etc ....

2) Définir une suite par une formule explicite

a) Cas général :

On peut calculer directement chacun des termes d'une suite par la donnée d'une formule explicite de $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$

Exemple 1 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = (-1)^n$

Alors $u_0 = (-1)^0 = 1$ $\quad u_1 = (-1)^1 = -1$ $\quad u_{1000} = (-1)^{1000} = 1$ $\quad u_{1997} = (-1)^{1997} = -1$

Exemple 2 : On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{(-2)^n + 3n}{7 + (-1)^n}$

Alors $v_0 = \frac{(-2)^0 + 3 \times 0}{7 + (-1)^0} = \frac{1}{7}$ $\quad v_1 = \frac{(-2)^1 + 3 \times 1}{7 + (-1)^1} = \frac{(-2) + 3}{7-1} = \frac{1}{6}$

$v_2 = \frac{(-2)^2 + 3 \times 2}{7 + (-1)^2} = \frac{4+6}{7+1} = \frac{10}{8}$ $\quad v_3 = \frac{(-2)^3 + 3 \times 3}{7 + (-1)^3} = \frac{(-8) + 9}{7-1} = \frac{1}{6}$

b) Cas particulier : Avec une fonction.

Dans certains cas, il existe une fonction f définie sur $[\,0;+\infty\,[$ où la suite u_n peut s'écrire sous la forme : $u_n = f(n)$.

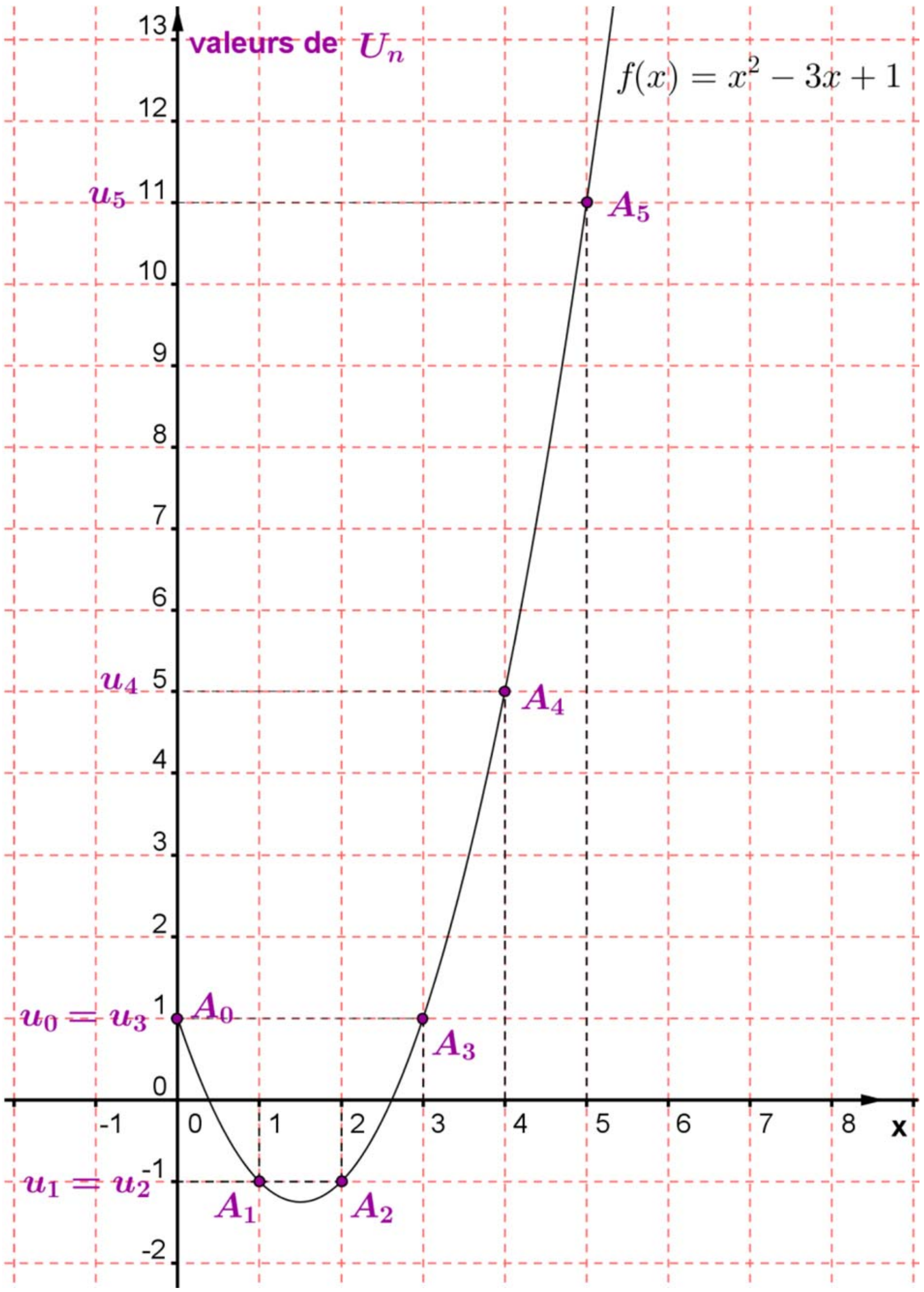
Exemple: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = n^2 - 3n + 1$

Il existe une fonction f définie sur $[0\ ;+\infty\ [$ tel que $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

On a donc : $u_n = f(n) = n^2 - 3n + 1$ alors

$u_0 = f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$; $u_1 = f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$; $u_2 = f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$;

$u_3 = f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 1$; $u_4 = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 5$;



3) Définir une suite par récurrence

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On définit une suite en posant pour tout entier naturel n $u_{n+1} = f(u_n)$

La valeur de u_0 est donnée. On l'appelle « terme initial ».

Remarque : La formule n'est pas explicite, on calcule chaque terme de la suite en fonction du terme précédent

Exemple : considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_0 = 1$.

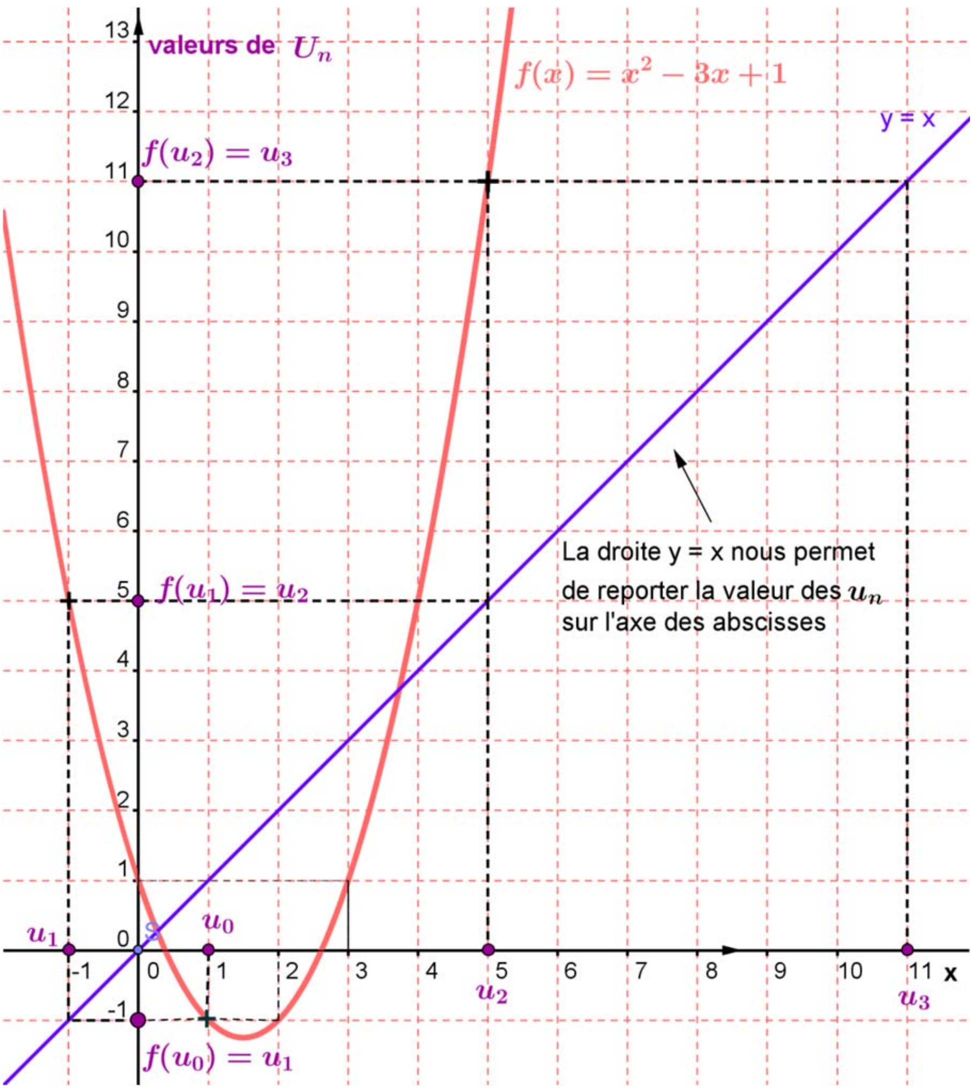
On peut donc définir une suite en posant $u_{n+1} = f(u_n) = {u_n}^2 - 3u_n + 1$

$u_1 = f(u_0) = f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$; $u_2 = f(u_1) = f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 = 5$;

$u_3 = f(u_2) = f(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 1 = 11$; $u_4 = f(u_3) = f(11) = 11^2 - 3 \times 11 + 1 = 89$; etc ...

On constate que cette suite, malgré des apparences qui peuvent sembler proches de celles du paragraphe précédent, n'est pas du tout la même. On dira dans ce cas que la suite est donnée par une formule de récurrence

Représentation graphique de la suite (u_n) :



II) Sens de variation d'une suite numérique.

1) Définitions :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$, une suite numérique. On dit que cette suite est :

- **croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$;**
- **strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$;**
- **décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$;**
- **strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.**

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, est monotone si elle est croissante ou décroissante

Remarque : pour connaître le sens de variation d'une suite, on compare donc deux termes consécutifs de la suite. On doit faire cela pour tous les termes de la suite.

2) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Selon l'expression de la suite (u_n) :

- **Méthode 1 : On calculera l'expression $u_{n+1} - u_n$ et on étudiera son signe :**

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite u est croissante

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite u est décroissante

En Effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

- **Méthode 2 : Dans le cas où $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonctions f sur [0 ; +∞ [**

Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur [0 ; + ∞ [

Si la fonction f est croissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est croissante aussi

Si la fonction f est décroissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est décroissante aussi

En effet , pour tout entier naturel n, $n < n + 1$, si f est croissante alors $f(n) < f(n+1)$

si f est décroissante alors $f(n) > f(n+1)$

Remarque: On peut aussi, sous certaines conditions, calculer l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare cette expression à 1:

Tout d'abord, il faut prouver que tous les termes de la suite u sont positifs

Puis, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

- Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante
- Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est décroissante

En Effet, Si tous les termes de la suite u sont positifs, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

3) Exemples

Exemple 1: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = 3n + 1$ on a donc :

$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et $u_0 = 2$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times u_n}{u_n} = 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1}$,

Comme tous les u_n sont positifs car $u_0 = 2$

on a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 3: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $u_n = f(n)$.Pour tout entier naturel $\mathbb{N}$ non nul ,

f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty\ [$, comme $n < n+1$ alors pour tout

$n > 0$, $f(n) > f(n+1)$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 4: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = n^2 - 1$

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n - n^2 + 1 = 2n + 1$

Pour $n \geq 0$ $2n + 1 > 0$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 5: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par: $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x + 4$

avec $u_0 = 2$

$u_1 = u_0 + 4 = 2 + 4 = 6$

$u_2 = u_1 + 4 = 6 + 4 = 10$

$u_3 = u_2 + 4 = 10 + 4 = 14$

$u_{n+1} - u_n = u_n + 4 - u_n = 4 > 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.