Système de deux équations à deux inconnues

I) Système de deux équations à deux inconnues

1) définitions

Définition 1 :

Un système de deux équations à deux inconnues est de la forme :
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ **où a , b , c, a' , b' et c' sont des nombres relatifs ,**
les deux nombres inconnues sont désignés par les lettres x et y

Exemple :

$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x+4y=\ -1 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues. Les nombres x et y sont les inconnues.

Définition 2 :

a ,b , c, a' , b' , c' sont des nombres relatifs.
Résoudre un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$
c'est trouver tous les couples de nombres $(x\,;y)$ qui sont à la fois solutions des deux équations

Exemple 1 :

Le couple (8 ; -2) est il une solution du système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x+5y=6 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$

Si $x=8$ et $y=\ -2$ alors :

$2\times 8+5\times(-2)=\ 16-10=6$

donc le couple (8 ; -2) vérifie la **première équation**

$5\times 8-3\times(-2)=\ 40+6=46$ et $46\neq 2$

donc le couple (8 ; -2) ne vérifie pas la **deuxième équation**

Donc le couple (8 ; -2) n'est pas solution de ce système

Exemple 2 :

Le couple (9 ; 2) est il une solution du système d'équations suivant ?:

$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$

si $\boldsymbol{x = 9}$ **et** $\boldsymbol{y = 2}$ alors :

$2 \times 9 - 3 \times 2 = 18 - 6 = 12$ donc le couple de nombres (9 ; 2) vérifie la première équation

$9 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$ donc le couple de nombres (9 ; 2) vérifie la deuxième équation

Le couple (9 ; 2) est bien solution de ce système

II) Méthode de résolution

1) Résolution par combinaison

Résoudre par la méthode de combinaison le système $\begin{cases} \mathbf{4}x + 3y = 2 \\ \mathbf{6}x + 7y = 13 \end{cases}$

a) On repère les coefficients devant une des deux inconnues, par exemple ceux de x, et on détermine un de leurs multiples communs non nuls :

12 est un multiple commun de 4 et 6

b) On rend égaux les coefficients devant l'inconnue choisie :

(dans notre cas, on rend égaux les coefficients devant x)

Pour avoir 12 comme coefficient devant les termes en x

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \quad \textit{On multiplie par 3 cette ligne} \\ 6x + 7y = 13. \textit{On multiplie par 2 cette ligne} \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} \mathbf{12}x + 9y = 6 \\ \mathbf{12}x + 14y = 26 \end{cases}$

c) On soustrait les égalités membre à membre et on résout l'équation obtenue :

$(12x - 12x) + (9y - 14y) = 6 - 26$

$0 - 5y = -20$

$-5y = -20$

$y = -20 \div -5 = 4$

$\boldsymbol{y = 4}$

d) On détermine la valeur de l'autre inconnue en remplaçant la valeur trouvée dans une des deux équations :

En remplaçant $y = 4$ dans la première équation obtient :

$4x + 3 \times 4 = 2$ ce qui donne : $4x + 12 = 2$

$4x = 2 - 12$

$4x = -10$

Soit $x = -\frac{10}{4}$

$\boldsymbol{x = -2,5}$

Le couple (- 2,5 ; 4) est solution du système

e) On vérifie si le couple trouvé est une solution du système de départ

$4 \times (-2,5) + 3 \times 4 = -10 + 12 = 2$ et

$6 \times (-2,5) + 7 \times 4 = -15 + 28 = 13$

6) Conclusion :

Le système possède une unique solution le couple de nombres : (-2,5 ; 4)

2) Résolution par substitution du système

Résoudre par la méthode de substitution le système : $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

a) On exprime une des inconnues en fonction de l'autre

On choisit l'équation et l'inconnue afin d'avoir les calculs les plus simples.

Dans ce système, le plus simple et d'exprimer $\boldsymbol{y}$ **en fonction de** $\boldsymbol{x}$ de la première équation : $3x + y = 1$ et on obtient :

$\boldsymbol{y = 1 - 3x}$

b) On remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans l'autre équation:

On remplace y par l'expression $1 - 3x$ dans la deuxième équation :

$2x + 3(1 - 3x) = -4$

$2x + 3 - 9x = -4$

$-7x + 3 = -4$

$-7x = -4 - 3 = -7$

$-7x = -7$

$x = \frac{-7}{-7} = 1$ donc

$\boldsymbol{x = 1}$

c) On détermine la valeur de l'autre inconnue

On sait que $\boldsymbol{y = 1 - 3x}$ **.** Il suffit de remplacer x par 1 dans cette expression

On obtient : $\boldsymbol{y = 1 - 3 = -2}$

$\boldsymbol{y = -2}$

d) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$3 \times 1 + (-2) = 3 - 2 = 1$ et

$2 \times 1 + 3 \times (-2) = 2 - 6 = -4$

e) Conclusion :

Le couple (1 ; - 2) est solution de ce système

III) Méthode graphique :

Soit le système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

1) On exprime y en fonction de x dans les deux équations

on obtient un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ :

$6x - 3y = 9$ On a donc : $-3y = 9 - 6x$ soit $y = \frac{-6}{-3}x + \frac{9}{-3}$ on obtient donc : $y = 2x - 3$

$2x + y = 5$ On a donc $y = -2x + 5$. On obtient le système :

$\begin{cases} \boldsymbol{y = 2x - 3 \quad (1)} \\ \boldsymbol{y = -2x + 5 \quad (2)} \end{cases}$

2) Dans un repère, on représente graphiquement les fonctions affines associées au système

• La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 3$ est une droite d'équation $y = 2x - 3$ (qui est l'équation (1) du système).On notera cette droite (d1)

Si $\boldsymbol{x = 1}$ alors $y = 2 - 3 = \boldsymbol{-1}$ et si $\boldsymbol{x = 0}$ alors $\boldsymbol{y = -3}$

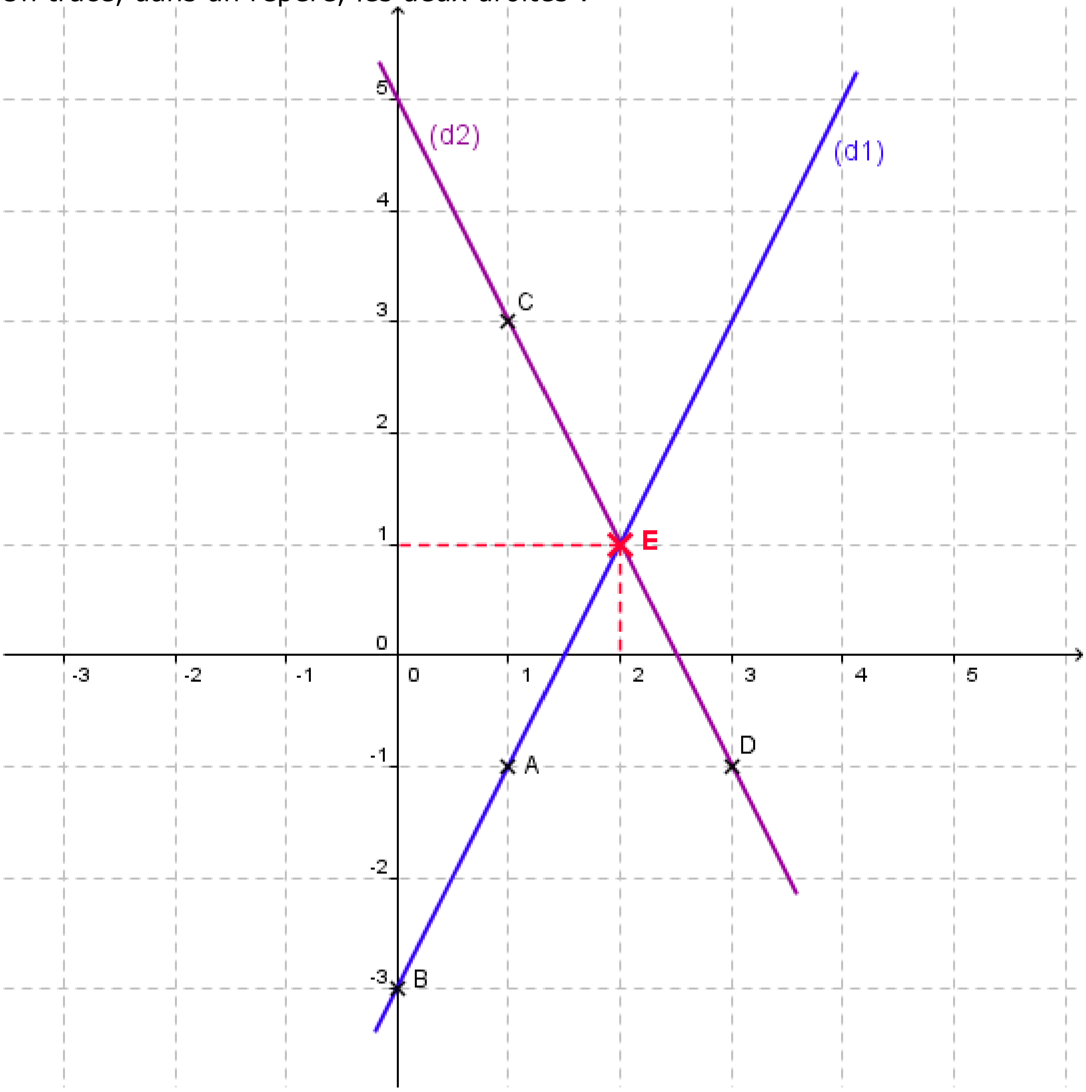
La droite (d1) passe par les points **A (1 ; -1)** et **B (0 ; -3)**

• La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -2x + 5$ est une droite d'équation $y = -2x + 5$ (qui est l'équation (2) du système).On notera cette droite (d2)

Si $\boldsymbol{x = 1}$ alors $y = -2 + 5 = \boldsymbol{3}$ et si $\boldsymbol{x = 3}$ alors $\boldsymbol{y} = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = \boldsymbol{-1}$

La droite (d2) passe par les points **C (1 ; 3)** et **B (3 ; -1)**

On trace, dans un repère, les deux droites :



3) On lit les coordonnées du point d'intersection des droites (d1) et (d2)

Les coordonnées du point d'intersection E des deux droites sont : (2 ; 1)

Le couple (2 ; 1) est solution de ce système

4) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$6 \times 2 - 3 \times 1 = 12 - 3 = 9$ et

$2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Le couple (2 ; 1) est bien solution du système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Remarque :

Une lecture graphique conduit souvent à une solution approchée du système (coordonnées non entière, imprécision des tracés etc..).

Il faut donc toujours vérifier les résultats de la lecture graphique par le calcul.