Aires et Volumes, effets des agrandissements. Grandeurs composées

I) Aires et Volumes

1) Le parallélépipède rectangle et le carré

Le volume d'un pavé droit de longueur L, de largeur l et de hauteur h est :
$\mathcal{V} = L \times l \times h$
Le volume d'un cube de côté a est : $\mathcal{V} = a^3$

Exemple :

Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur 3 cm , de largeur 4 cm et de hauteur 2 cm est $\mathcal{V} = 3 \times 4 \times 2 = 24\ cm^3$

2) Le cylindre de révolution et le prisme droit

Le volume d'un cylindre ou d'un prisme droit de hauteur h est :
$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times h$

Exemple

Le volume d'un cylindre de révolution de rayon 3 cm de hauteur 2 cm est :

$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 2 \approx 56,52\ cm^3$

3) La pyramide et le cône de révolution

Le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution de hauteur h est :
$\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times h}{3}$

Exemple

Le volume d'une pyramide dont la base est un carré dont les côtés mesurent 4 cm et de hauteur 6 cm est :

$\mathcal{V} = \dfrac{4^2 \times 6}{3} = 32\ cm^3$

4) La shère et la boule

Le volume d'une boule de rayon r est : $\mathcal{V} = \frac{4\times\pi\times r^3}{3}$
Et l'aire d'une sphère de rayon r est $\mathcal{A} = 4\pi r^2$

Exemple s

Le volume d'une boule de rayon 6 cm est :

$\mathcal{V} = \frac{4\times\pi\times 6^3}{3} \approx 904{,}32\ cm^3$

L'aire d'une sphère de rayon 6 cm est :

$\mathcal{A} = 4\times\pi\times 6^2 \approx 452{,}16\ cm^3$

II) Agrandissement et Réduction d'une figure

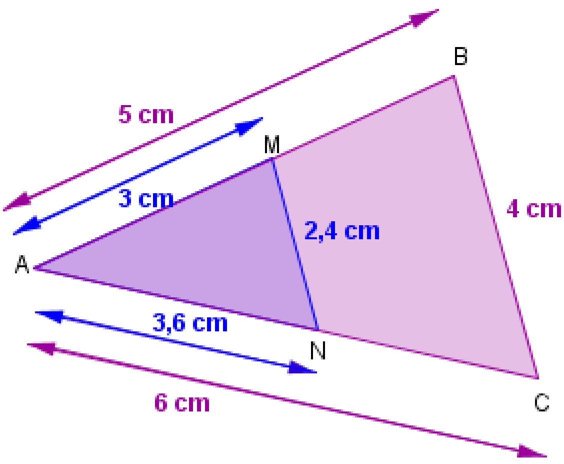
1) Définition :

Lorsque toutes les longueurs d'une figure $\mathcal{F}$ sont multipliées par un même nombre k on obtient une autre figure $\mathcal{F}$' qui est :
- **Une réduction de la figure $\mathcal{F}$ si : 0< k <1**
- **Un agrandissement de la figure $\mathcal{F}$ si : k > 1**

K est le facteur d'agrandissement ou de réduction

2) Exemples :

Exemple 1 :



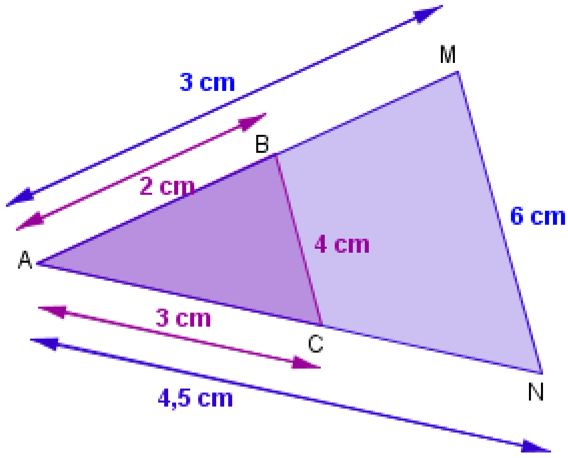
$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$ = 0,6. et

AM = AB$\times$ **0,6** = 5 × 0,6 = 3 cm
AN = AC$\times$ **0,6**= 6 × 0,6 = 3,6 cm
MN = BC$\times$ **0,6**= 4 × 0,6 = 2,4 cm

Comme 0,6 <1, Le triangle ANM est donc une réduction du triangle ABC. Pour obtenir les longueurs du triangle AMN on a multiplié celle du triangle ABC par 0,6.

0,6 est le facteur de réduction.

Exemple 2 :



$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{2}$ = 1,5. et

AM = AB$\times$ **1,5** = 2 × 1,5= 3 cm
AN = AC$\times$ **1,5** = 3 × 1,5= 4,5 cm
MN = BC$\times$ **1,5** = 4 × 1,5= 6 cm

Comme 1,5 > 1 , Le triangle ANM est donc un agrandissement du triangle ABC. Pour obtenir les longueurs du triangle AMN on a multiplié celle du triangle ABC par 1,5.

1,5 est le facteur d'agrandissment.

3) Propriétés

Si $\mathcal{F}$ **' est une réduction ou un agrandissement de facteur k d'une figure** $\mathcal{F}$ **alors :**

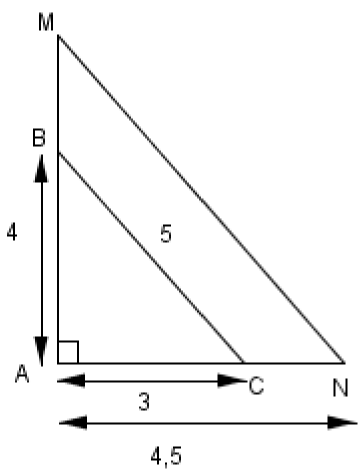
• Le périmètre de la figure $\mathcal{F}$ **' obtenue est égal au produit du périmètre de la figure** $\mathcal{F}$ **par le facteur k**

• L'aire de la figure $\mathcal{F}$ **' obtenue est égal au produit de l'aire de la figure** $\mathcal{F}$ **par le facteur k² .**

• Le volume de la figure $\mathcal{F}$ **' obtenue est égal au produit du volume de la figure** $\mathcal{F}$ **par le facteur** k^3 **.**

Exemples :

Exemple 1



Le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC
1) Quel est le facteur d'agrandissement ?
2) Quel est le périmètre et l'aire du triangle ABC ?
3) En déduire le périmètre et l'aire du triangle AMN.

Réponse :

1) $\frac{AN}{AC} = \frac{4,5}{3}$ = 1,5.

Le facteur d'agrandissement est 1,5.

2) Périmètre du triangle ABC :

p = AB + AC + BC = 3 + 4 + 5= 12 cm.

Le périmètre du triangle ABC est 12 cm

Aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{3\times4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

L'aire du triangle ABC est de 6 cm²

3) Le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC dont **le facteur est 1,5**.

Le périmètre du triangle AMN est donc le produit du périmètre du triangle ABC par 1,5

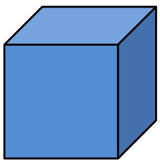
P = 12 $\times$ 1,5 = 18 cm **.Le périmètre du triangle AMN est 18cm**

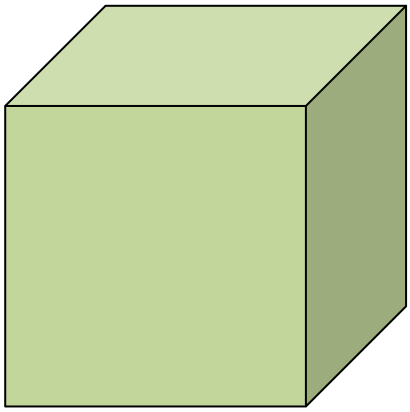
L'aire du triangle AMN est donc le produit de l'aire du triangle ABC par $1{,}5^2$

P =6$\times$ $1{,}5^2$ = 6$\times$ 2,25 =13,5 cm^2 **.L'aire du triangle AMN est 13,5 cm^2**

Exemple 2

5 cm





Le cube vert est un agrandissement du cube bleu de rapport 3

Un cube d'arête 5 cm a pour volume : V = 5^3 = 125 cm^3

L'aire de chaque face est : $\mathcal{A}$ = 5^2 = 25 cm^2

Si on multiplie par 3 la longueur de ses arêtes alors :

Son volume est multiplié par 3^3 = 27

Le volume du cube agrandi est : 27 × 125 = **3 375 cm^3**

Son aire est multipliée par 3^2 = 9 :

L'aire du cube agrandi est : 9 × 25 = **225 cm^2**

III) Grandeurs composées

1) Grandeur quotient

Définition :

Lorsqu'on effectue le quotient de deux grandeurs, on obtient une grandeur quotient

Exemple :

La vitesse v = $\frac{d}{t}$ est le quotient de deux grandeurs. La vitesse est une grandeur quotient.
Si la distance est en kilomètre et le temps en heure alors son unité est : km/h ou km.h^{-1}

2) Grandeur produit

Définition :

Lorsqu'on effectue le produit de deux grandeurs , on obtient une grandeur produit

Exemple :

L'aire d'un rectangle est $\mathcal{A} = l \times L$

L'aire est le produit de deux grandeurs. L'aire est donc une grandeur produit

Si la longueur et la largeur sont en mètres alors l'aire s'exprime en $\text{m} \times \text{m}$ soit en m^2