Nombres entiers et rationnels

I) diviseur d'un entier naturel

1) Définition :

Pour deux nombres entiers naturels a et d non nuls :

d est un diviseur **de a si il existe un entier k tel que** $a = d \times k$

k étant non nul , il est aussi un diviseur **de a**

Exemple :

2 est il un diviseur de 6 ?

$6 = 3 \times 2$

2 est un bien un **diviseur** de **6**, et **3** est aussi un **diviseur** de **6**.

2) Remarques :

Quelque soit le nombre entier naturel n

Nous avons $1 \times n = n$

Donc 1 **est un** diviseur **de tout nombre entier naturel.**

Et tout nombre naturel est un diviseur **de lui-même**

Exemple :

Comme $6 = 1 \times 6$,

1 et **6** sont des **diviseurs** de **6**.

3) Vocabulaire à connaître :

2 est un diviseur de 6

6 a pour diviseur 2

6 est divisible par 2

II) Diviseurs communs et PGCD

1) Les définition :

a) Définition 1:

Un diviseur commun **à deux entiers naturels** a et b**,**
est un entier naturel qui divise à la fois a et b

Exemple :

Donner tous les diviseurs communs à 12 et 42

Diviseurs de 12 : **1** ; **2** ; **3** ; 4 ; **6** ; 12
car $1 \times 12 = 12$; $2 \times 6 = 12$; et $3 \times 4 = 12$

Diviseurs de 42 : **1** ; **2** ; **3** ; **6** ; 7 ; 14 ; 21 ; 42
car $1 \times 42 = 42$; $2 \times 21 = 42$; $3 \times 14 = 42$ et $6 \times 7 = 42$

Tous les diviseurs communs à 12 et 42 sont **1** ; **2** ; **3** et **6**

b) définition 2 :

Soit a et b deux entiers naturels
le plus grand entier qui divise à la fois a et b est appelé
le Plus grand commun diviseur de a et b,
il est noté PGCD (a ; b)

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent :
les diviseurs communs à 12 et 42 sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

Le plus grand est 6 .

Donc PGCD (12 ; 42) = 6

c) Propriété:

La somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier

Exemples :

Exemple 1

Prenons deux multiples de 3. : 12 et 21

Si on fait la somme de ces deux multiples de 3 on obtient :
21 + 12 = 33.et 33 est aussi un multiple de 3.

Si on fait la différence de ces deux multiples de 3 on obtient :
21 – 12 = 9 et 9 est aussi un multiple de 3

Exemple 2

Prenons deux multiples de 8. : 16 et 32

Si on fait la somme de ces deux multiples de 8 on obtient :
16 + 32= 48.et 48 est aussi un multiple de 8.

Si on fait la différence de ces deux multiples de 8 on obtient :
32 – 16 = 16 et 16 est aussi un multiple de 8

2) les méthodes de calcul du PGCD

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le PGCD de deux nombres :

1ère méthode :

a) On écrit la liste dans l'ordre croissant des diviseurs de chacun des nombres

**b) On souligne les diviseurs communs aux deux nombres
et le plus grand et le PGCD**

Nous avons utilisé cette méthode dans l'exemple précédent.

Conseil :

Utiliser cette méthode lorsque les nombres sont simples

(S'ils sont trop grands la liste des diviseurs est trop importante,
la méthode devient alors trop longue et on prend le risque de faire des erreurs ou des oublis)

2ème méthode : L'algorithme d'Euclide

Il faut que a > b

a	**b**
r	q

- **On fait la division euclidienne de a par b. On obtient le reste r**
- **si r = 0 alors le PGCD est b**
- **si r $\neq$ 0 alors on fait la division de b par r**

b	**r**
•	•

- **On continue de même jusqu'à obtenir un reste nul.**
- **Le PGCD est alors le dernier reste non nul**

Exemple :

Calculer le PGCD de 759 et 552.Les résultats importants sont dans le tableau ci-dessous:

Dividende	Diviseur	Reste
759	**552**	207
552	207	138
207	138	**69**
138	**69**	**0**

On peut aussi poser toutes les divisions :

759	552	552	207	207	138	138	69
207	1	**138**	2	**69**	1	0	2

Le dernier reste non nul est 69 donc **PGCD (759 ; 552) = 69**

Il existe d'autres méthodes mais les plus courantes sont celles qui ont été vues ci-dessus.

III Nombres premiers entre eux

Définition :

Deux nombres entiers (non nuls) sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1

Exemples :

Exemple 1

Nous avons vu que PGCD (12 ; 42) = 6 donc **12 et 42 ne sont pas premiers entre eux**

Exemple 2 Les nombres 2 et 15, sont-ils premiers entre eux ?

Déterminons le PGCD de 2 et de 15

Les diviseurs de 2 sont 1 et 2

Les diviseurs de 15 sont 1 ; 3 ; 5 et 15

Le diviseur commun à 2 et 15 est 1

Donc PGCD (2 ; 15) = 1

2 et 15 sont donc premiers entre eux

IV) Fraction irréductible

1) Définition :

Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux

Exemple 1 :

$\frac{2}{15}$ est une fraction irréductible
(nous avons vu dans l'exemple précédent que 2 et 15 sont premiers entre eux)

Exemple 2 :

$\frac{42}{12}$ n'est pas une fraction irréductible car 12 et 42 sont des multiples de 2 par conséquence

12 et 42 ne sont pas premiers entre eux.

2) Propriété :

Pour rendre une fraction irréductible on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD

Exemple :

Rendre la fraction $\frac{759}{552}$ irréductible. Nous avons vu précédemment (en utilisant l'algorithme d'Euclide) que le PGCD de 759 et 552 est égal à 69.

Il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par 69

$\frac{759}{552} = \frac{759 \div 69}{552 \div 69} = \frac{11}{8}$ et $\frac{11}{8}$ est bien une fraction irréductible

V) Les nombres

1) Définition

L'ensemble des nombres entiers naturels noté $\mathbb{N}$ est l'ensemble de tous les nombres entiers positifs : { 0 ; 1 ;2 ; 3 …}

L'ensemble des nombres entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tous les nombres entiers positifs et négatifs : { …-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; …}

L'ensemble des nombres décimaux noté $\mathbb{D}$ est l'ensemble de tous les nombres, positifs et négatifs, qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, leur dénominateur est 1 ; 10 ; 100 ; 1000…

L'ensemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$ est l'ensemble de tous les nombres, positifs et négatifs, pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction.

L'ensemble des nombres irrationnels est l'ensemble de tous les nombres, positifs et négatifs, qui ne sont pas rationnels c'est à dire dont on ne peut avoir que des valeurs approchées et qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction : { π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$…}

Exemples :

$\frac{10}{3}$ est un nombre rationnel.

$\frac{7}{2} = \frac{35}{10}$ est un nombre rationnel mais c'est aussi un nombre décimal.

2) Remarques : **Tous les nombres entiers naturels sont aussi des nombres entiers relatifs**

Exemple :

2 est à la fois un entier naturel et un entier relatif

Tous les nombres entiers relatifs sont des décimaux

Exemple :

$$-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-30}{10}$$

Tous les nombres décimaux sont des rationnels

Exemple :

3,5 = $\frac{35}{10}$ qui est une fraction (décimale)

3) Représentation