Fonction affine

I) Définition et exemples

1) Définition

Soit a et b deux nombres connus et fixés.
Une fonction affine est une fonction numérique de la forme :
$\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ **ou** $\boldsymbol{f : x \mapsto ax + b}$

2) Exemples:

Exemple 1 :

Une société propose une formule d'abonnement de 28 € mensuel pour un forfait de 2 heures de communication et 0,50 € par minute de dépassement.

Le prix à payer pour 20 minutes de dépassement est : $28 + 0{,}5 \times 20 = 28 + 10 = 38$
Pour 20 minutes de dépassement le prix est de 38 €

Pour x minutes de dépassement, le prix exprimé en euro est : $\boldsymbol{f(x) = 28 + 0{,}5\,x}$
La fonction f ainsi définie est une fonction affine.

Exemple 2 :

Soit : $f(x) = 2x - 5$

a) Calculer $\boldsymbol{f(-2)}$

$f(-2) = 2 \times (-2) - 5 = -4 - 5 = -9$

Donc **l'image de −2 par f est −9**

b) Quel est l'antécédent de 7 par f ?

Dans ce cas on connaît l'image qui est 7 on cherche le nombre x tel que $\boldsymbol{x \mapsto 7}$

Soit $2x - 5 = 7$. On résout cette équation : $2x = 7 + 5$ soit $2x = 12$ $x = 12 \div 2 = 6$

Donc $\boldsymbol{x = 6}$

L'antécédent de 7 par f est 6

II) Représentation graphique

Propriété :

Soit a et b deux nombres fixés.
La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$
est la droite d'équation $y = ax + b$

1) Coefficient directeur

a est le coefficient directeur de la droite d'équation $y = ax + b$

Deux droites de même coefficient directeur sont parallèles.

2) Ordonnée à l'origine

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$

Pour $x = 0$ on a $f(0) = a \times 0 + b = b$

A l'origine des abscisses (quand $x = 0$), l'ordonné prend la valeur b ($y = b$)

Donc b est appelé ordonnée à l'origine et la représentation graphique de f passe par le point (0 ; b)

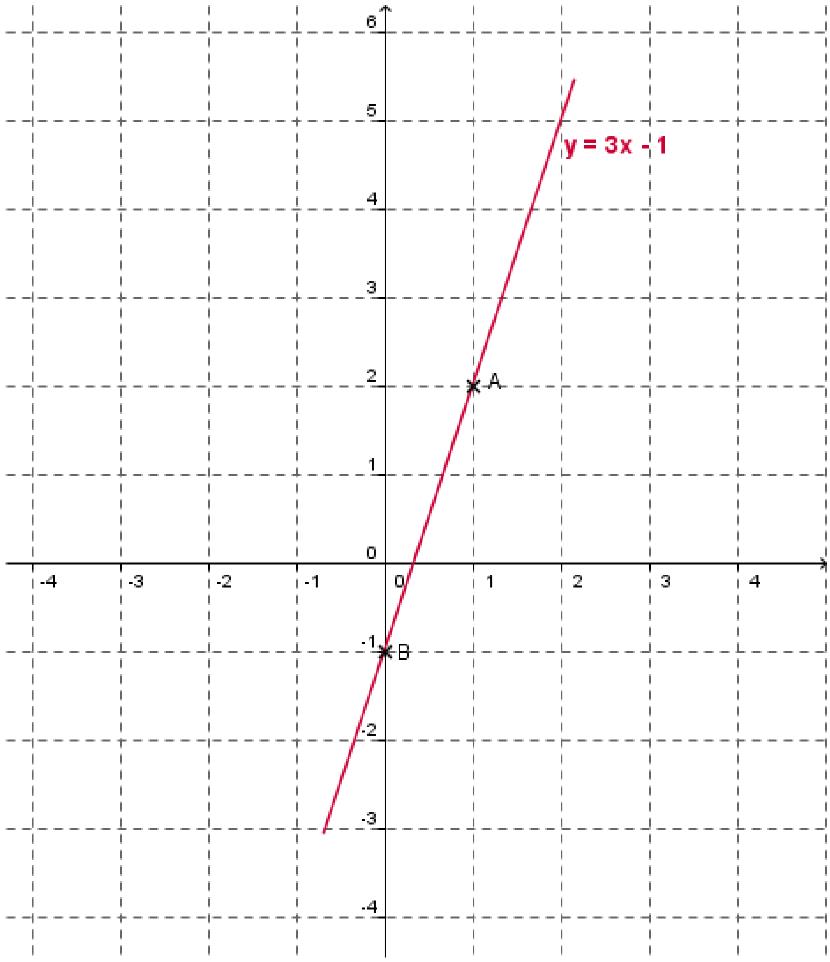
3) Représentation graphique

Exemple 1 :
Traçons la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = 3x - 1$.

Pour cela on prend **deux valeurs différentes de x** et on calcule leurs images respectives.

$\boldsymbol{f(0) = -1}$ et $f(1) = 3 \times 1 - 1 = 3 - 1 = 2$ donc $\boldsymbol{f(1) = 2}$

La représentation graphique de la fonction affine f est la droite d'équation $y = 3x - 1$ qui passe par les points A (1 ; 2) et B (0 ; -1).



Exemple 2 : Traçons les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies ci-dessous:

$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = 2x + 2$

Pour cela on prend **deux valeurs différentes de x pour chaque fonction** et on calcule leurs images respectives.

Pour la fonction f: $f(x) = 2x - 1$

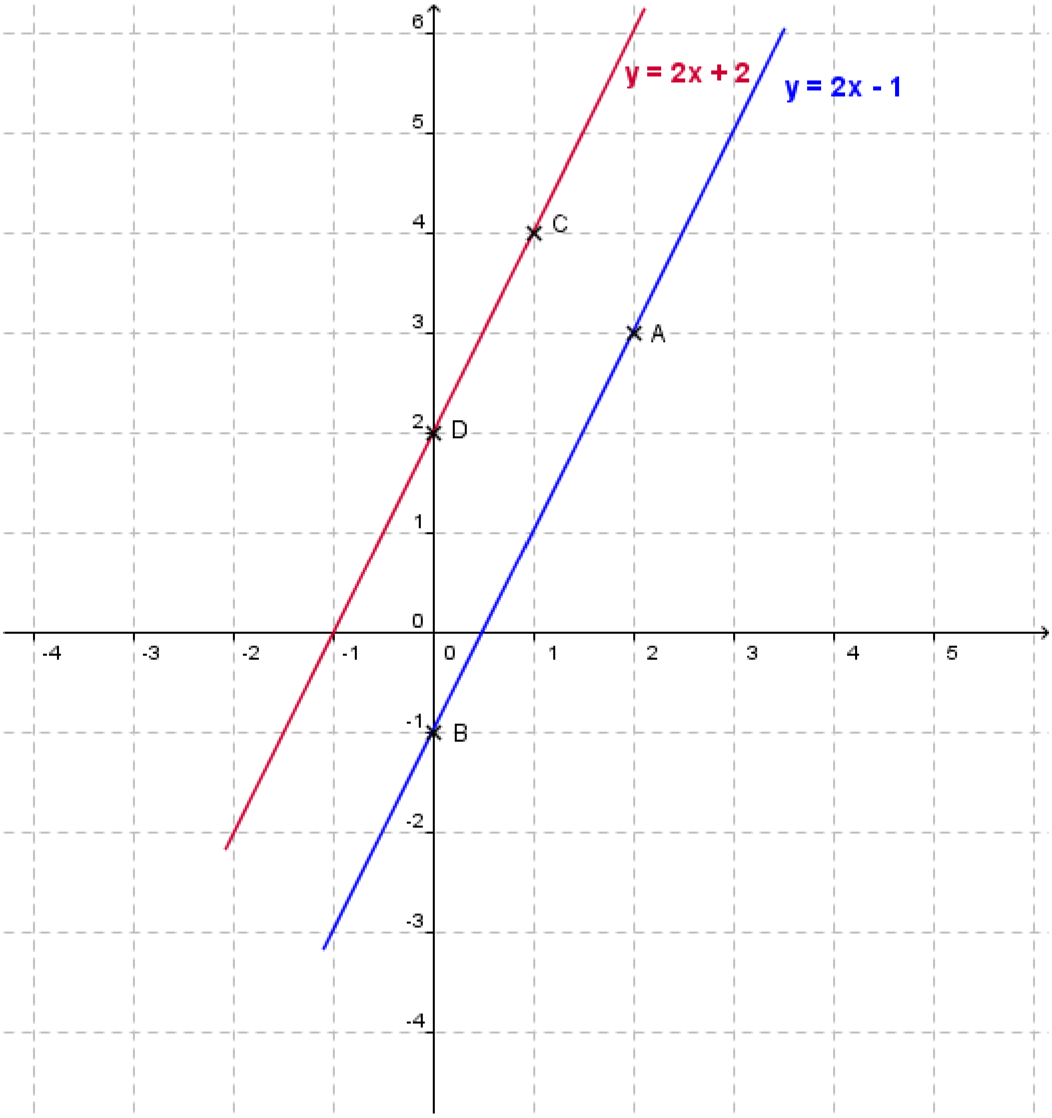
$\boldsymbol{f(0) = -1}$ et $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ donc $\boldsymbol{f(2) = 3}$

La représentation graphique de la fonction affine f est la droite d'équation $y = 2x - 1$
qui passe par les points A (2 ; 3) et B (0 ; -1).

Pour la fonction$g$: $g(x) = 2x + 2$**:**

$\boldsymbol{g(0) = 2}$ et $g(1) = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4$ donc $\boldsymbol{g(1) = 4}$

La représentation graphique de la fonction affine g est la droite d'équation $y = 2x + 2$
qui passe par les points C (1 ; 4) et D (0 ; 2).



Remarque :
Les deux droites ci-dessus sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur : **2**

III) Comment déterminer une fonction affine

1) Par le calcul

Pour déterminer une fonction affine : il faut connaître les images respectives de deux nombres donnés.que l'on notera x_1 et x_2

Propriété des accroissements :

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$
Quels que soient les nombres distincts x_1 et x_2 on a :
$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
a étant le coefficient de la fonction affine.

Exemple :

Déterminer la fonction affine telle que : $f(1) = 3$ et $f(2) = 5$

1ère étape :

On calcule la valeur de a en utilisant la formule ci-dessus :

a $= \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$ donc $a = 2$ donc la fonction affine est de la forme :

$f(x) = 2x + b$

2e étape :

On calcule la valeur de b.

Pour cela nous utilisons un des deux nombres donnés et son image.

Prenons par exemple f(1) = 3, on a donc $f(1) = 2 \times 1 + b = 2 + b = 3$.

Il suffit de résoudre l'équation : $2 + b = 3$ soit $b = 3 - 2 = 1$ donc **b= 1**

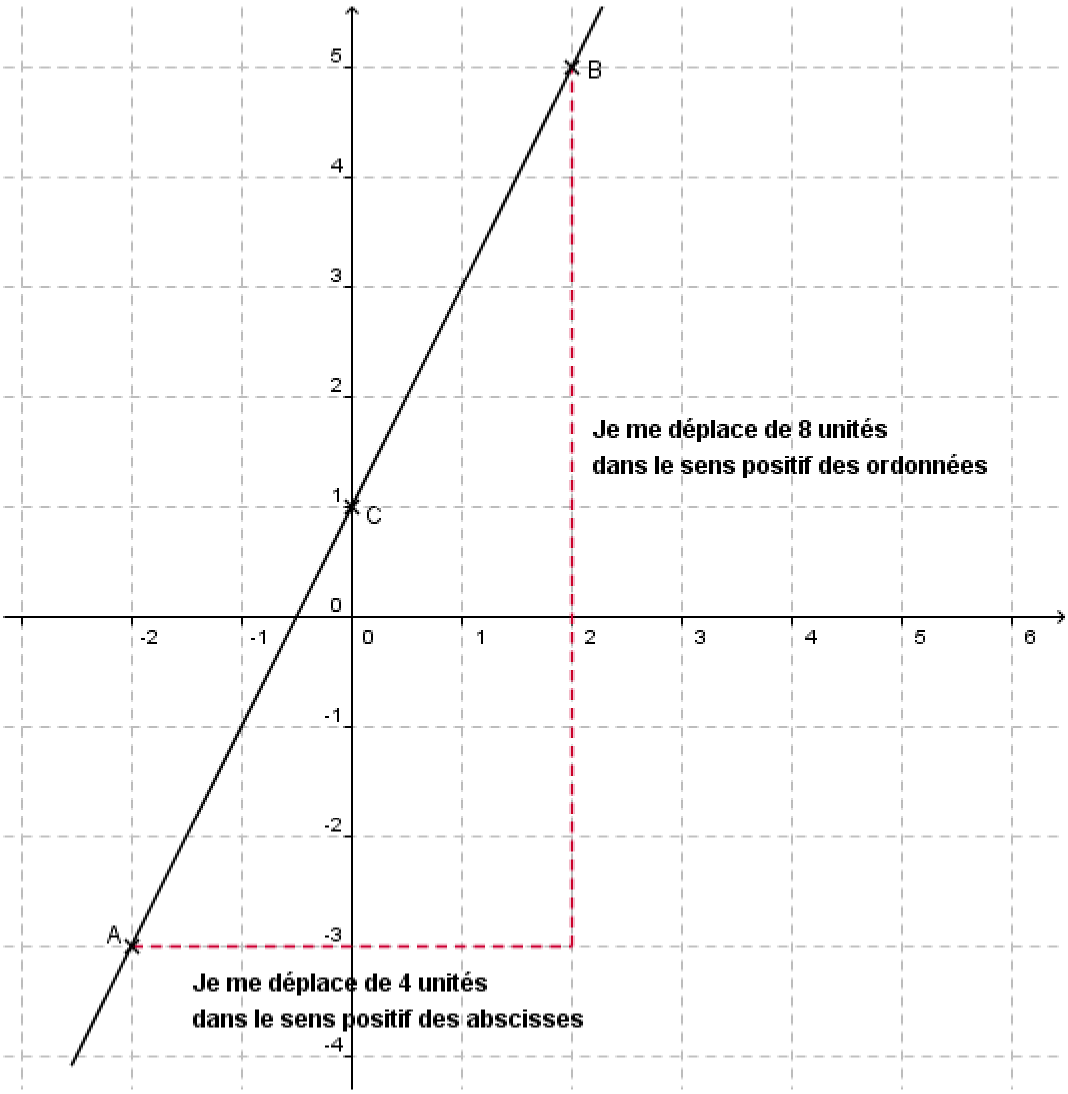
La fonction affine f est donc : $f(x) = 2x + 1$

Remarque : On aurait très bien pu remplacer x par 2 sachant que son image est 5, le résultat de b est bien évidemment le même**.**

2) Par lecture graphique :

Exemple :

Déterminer la fonction affine *f*, à l'aide de sa représentation graphique ci-dessous



On peut lire le coefficient directeur sur un graphique en utilisant les coordonnées (abscisses et ordonnées) de deux points distincts donnés et dont l'abscisse du premier point est inférieure à celle du deuxième.

Le coefficient directeur **a,** nous est alors donné par le rapport entre la différence des ordonnées $f(x_B) - f\,(x_A)$**,** et celle des abscisses $x_B - x_A$ de ces 2 points.

En lisant le graphique ci-dessus, $x_A < x_B$

Pour aller de A vers B, nous nous déplaçons de 4 unités dans le sens positif des abscisses, alors la différences des abscisses est égale à +4

Et pour aller de A vers B, nous nous déplaçons de 8 unités dans le sens positif des ordonnées, alors la différence des ordonnées est égale à +8

Le rapport entre la différence des ordonnés, et celle des abscisses est donc : $\frac{+8}{+4}$ = 2

Alors : $f(x) = 2x + b$

Pour avoir b on lit l'ordonnée à l'origine :

Donné par le point d'intersection de la droite (d) et de l'axe des ordonnées

b = +1 (car la droite passe par le point (0 ; 1))

donc la fonction affine est donc $\boldsymbol{f : x \mapsto 2\,x + 1}$