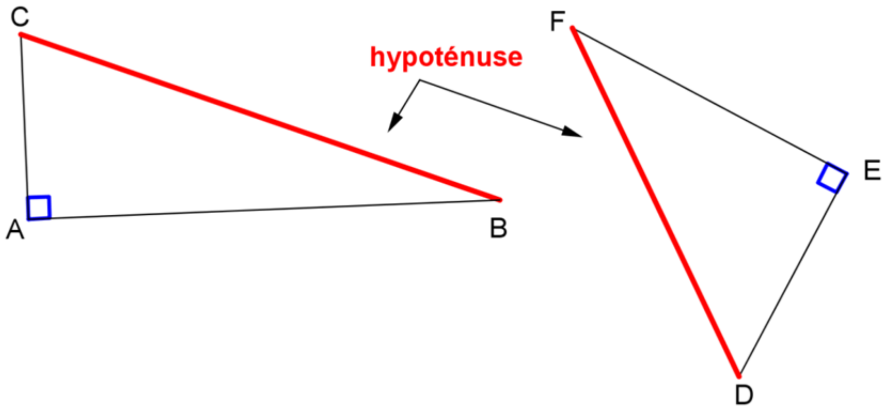
Le théorème de Pythagore et le cercle circonscrit au triangle rectangle (Rappel)

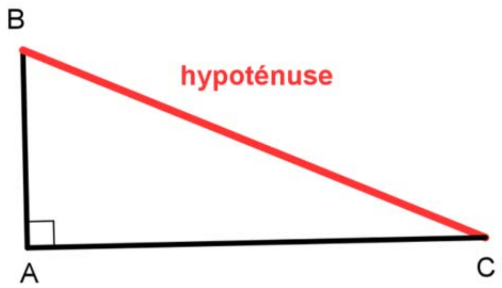
I) Le théorème de Pythagore

1) Définition :

Dans un triangle rectangle le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse.

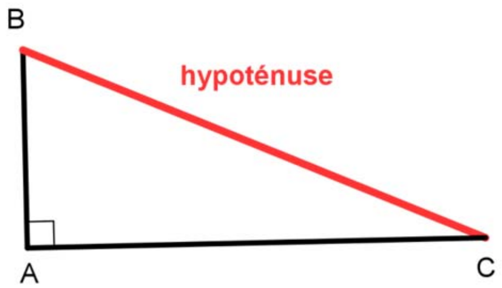


2) Egalité de Pythagore



- **Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.**
- **Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle**

Exemple :



- **Si ABC est un triangle rectangle en A alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$**
- **Si un triangle ABC est tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors il est rectangle en A.**
- **L'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est appelée égalité de Pythagore**

Remarque :

La première égalité sert, lorsque nous savons que le triangle est rectangle, à calculer une longueur connaissant les deux autres.

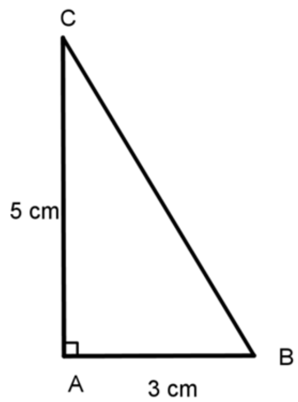
La deuxième égalité sert, lorsque nous connaissons les trois longueurs du triangle, à prouver qu'il est rectangle ou non.

3) Application :

a) Pour calculer une longueur :

Exemple 1 (Calculer la longueur de l'hypoténuse)

ABC est rectangle en **A** AB =3 cm et AC = 5 cm .Calculer BC



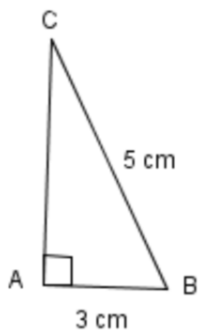
Le triangle ABC est rectangle en **A** d'après le théorème de Pythagore on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\qquad$ $BC^2 = 3^2 + 5^2$

$BC^2 = 9 + 25 = 34$

Donc $\mathbf{BC} = \sqrt{34}$ **cm** $\approx$ **5,83 cm**

Exemple 2 (Calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit)



ABC est un triangle rectangle en **A**
AB = 3 cm et BC = 5 cm Calculer AC

Le triangle ABC est rectangle en **A** d'après le théorème de Pythagore on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ $5^2 = 3^2 + AC^2$

$25 = 9 + AC^2$ $AC^2 = 25 - 9 = 16$

Donc **AC =** $\sqrt{16}$ **cm. AC = 4 cm**

b) Prouver qu'un triangle est rectangle ou pas

Exemple 3 :

Soit le triangle ABC tel que : AB = 4,5 cm ; BC = 6 cm et AC = 7,5cm
Montrer que ce triangle est rectangle :

a) On calcule le carré de la longueur du plus grand côté : $AC^2 = 7{,}5^2 =$ **56,25**

b) On calcule la somme des longueurs des carrés des deux autres côtés :

$AB^2 + BC^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 =$ **56,25**

c) On compare : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

d) Conclusion : L'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle ABC est donc rectangle en B.

Exemple 4

Soit ABC un triangle tel que AB = 4 cm AC = 5 cm et BC = 6 cm

a) On calcule le carré de la longueur du plus grand côté : $BC^2 = 6^2 = 36$

b) On calcule la somme des longueurs des carrés des deux autres côtés :

$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

c) On compare : $36 \neq 41$ alors $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

d) Conclusion : L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle ABC n'est donc pas rectangle.

II) Triangle rectangle et cercle circonscrit

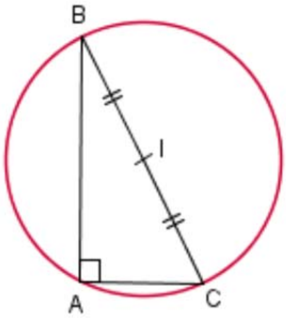
1) Propriétés

a) Triangle rectangle et cercle circonscrit

Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit

Donnée de l'énoncé :
ABC est un triangle rectangle

Conclusion :
[BC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC

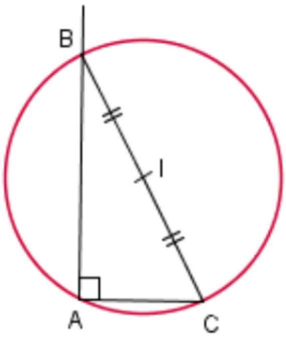


b) Propriété de l'angle droit

Si un angle $\widehat{BAC}$ est droit, alors le point A appartient au cercle de diamètre [BC]

Donnée de l'énoncé :
L'angle $\widehat{BAC}$ est droit

Conclusion :
Le point A appartient au cercle de diamètre [BC]



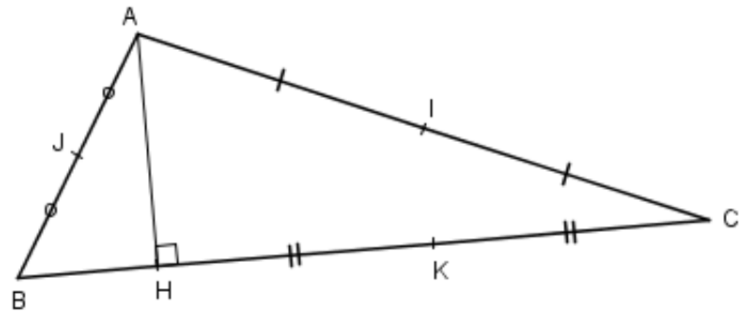
c) Exercices d'application

Exercice 1 :

Le segment [AH] est la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

Le point **I** est le milieu du segment [AC] , Le point J est le milieu du segment [AB] et Le point k est le milieu du segment [HC].

Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC. Justifier

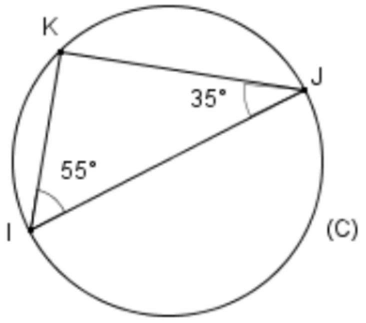


Nous savons que [AH] est la hauteur issue du point A dans le triangle ABC donc **le triangle AHC est rectangle en H**

Nous appliquons la propriété qui est : Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit

Conclusion : Le segment [AC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AHC. Le **centre de ce cercle est le point I milieu du côté [AC]**

Exercice 2 :



1) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$?

2) Le point K appartient-il au cercle (*C*)?

Réponse :

Nous savons que : $\widehat{KIJ} = 55°$ et $\widehat{KJI} = 35°$

Nous appliquons la propriété : Dans un triangle la somme des angles est de 180° :

Donc $\widehat{IKJ} = 180 - (55 + 35) = 180 - 90 = 90°$

Conclusion : L'angle $\widehat{IKJ}$ est donc droit

Maintenant **nous avons montré que** l'angle $\widehat{IKJ}$ est droit:

Nous appliquons la propriété : Si un angle $\widehat{IKJ}$ est droit, alors le point K appartient au cercle de diamètre [IJ].

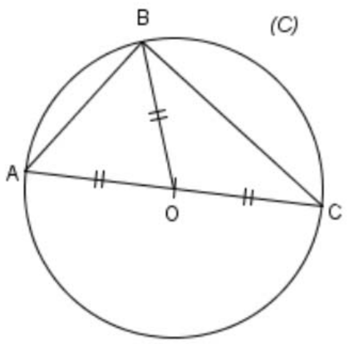
Conclusion : Le point K appartient au cercle (*c*) **.**

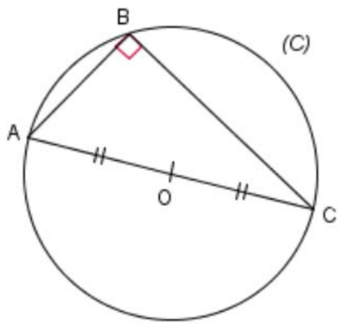
2) Propriétés réciproques

a) Triangle inscrit et triangle rectangle

Si un triangle inscrit dans un cercle a pour côté un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle

Exemple :





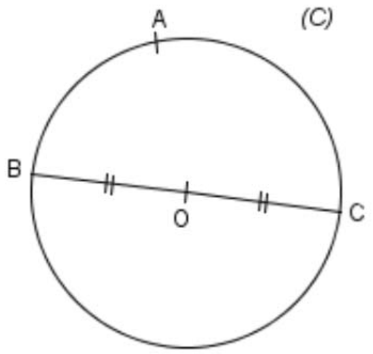
Données de l'énoncé :

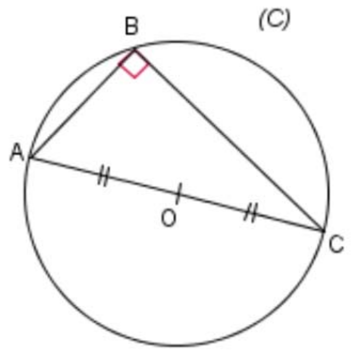
On sait que : ABC est un inscrit dans le cercle de diamètre [AC]

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle en B

b) Cercle et angles droits

Si un point A appartient au cercle de diamètre [BC] alors l’angle $\widehat{BAC}$ est droit



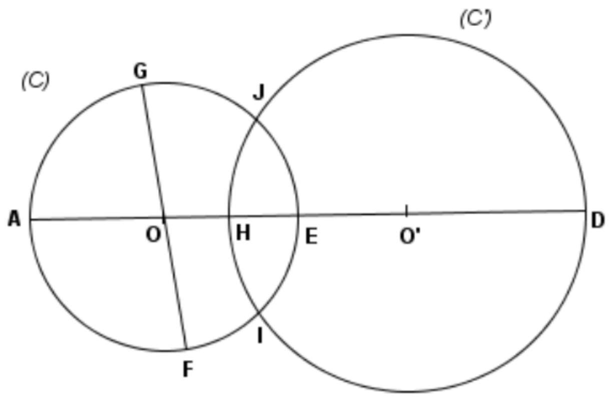


Donnée de l’énoncé :
Le point A appartient au cercle de diamètre [BC]

Conclusion :
L’angle $\widehat{BAC}$est droit

c) Exercices d’application

Exercices 1 : Nommer tous les triangles rectangles possibles à l’aide des points marqués sur la figure



Je sais que le côté [GF] du triangle AGF est le diamètre du cercle C.

J’applique la propriété réciproque qui est : Si un triangle inscrit dans un cercle a pour côté un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle

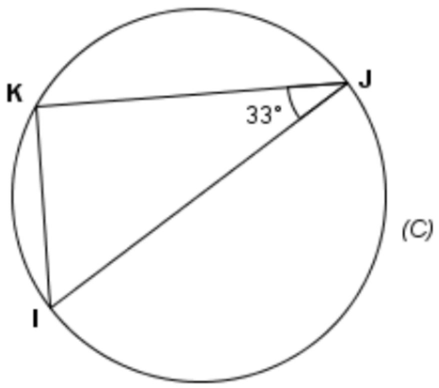
Conclusion : Le triangle AGF est rectangle en A

En utilisant la même méthode on peut dire que les triangles :

GFE ; AEG ; AEF ; HDJ ; HDI sont des triangles rectangles

Exercices 2 :

Le segment [IJ] est un diamètre du cercle (C) qui passe par le point K L'angle $\widehat{KJI}$ = 33°



1) Quelle est la mesure de l'angle$\widehat{IKJ}$?

2) Quelle est la mesure de l'angle$\widehat{KIJ}$?

Réponse

1) **Je sais que** le point K appartient au cercle de diamètre [IJ]

J'applique la propriété réciproque qui est
Si un point K appartient au cercle de diamètre [IJ] alors l'angle $\widehat{IKJ}$ est droit.

Conclusion : $\widehat{IKJ}$= 90 °

2) **Je sais que** $\widehat{IKJ}$ = 90 ° et $\widehat{KJI}$ = 33°

J'utilise la propriété qui est :

Dans un triangle la somme des angles est de 180° :

$\widehat{KIJ}$= 180 – (90 + 33) = 180 – 123 = 57 °

Conclusion : $\widehat{KIJ}$ = 57°