Le théorème de Thalès et sa réciproque

I) Agrandissement et Réduction d'une figure

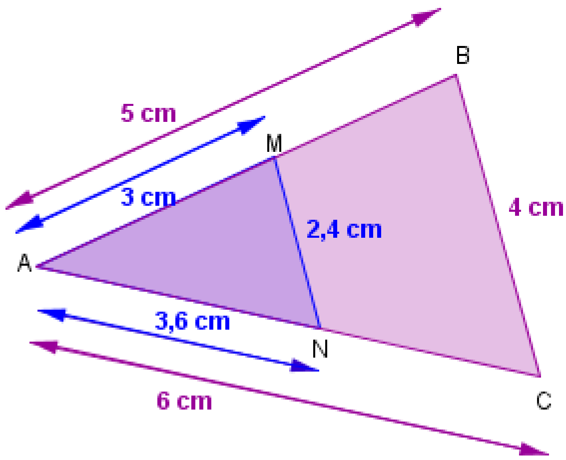
1) Définition :

Lorsque toutes les longueurs d'une figure $\mathcal{F}$ sont multipliées par un même nombre k on obtient une autre figure $\mathcal{F}$ ' qui est :
- **Une réduction de la figure $\mathcal{F}$ si : 0< k <1**
- **Un agrandissement de la figure $\mathcal{F}$ si : k > 1**

K est le facteur d'agrandissement ou de réduction

2) Exemples :

Exemple 1 :



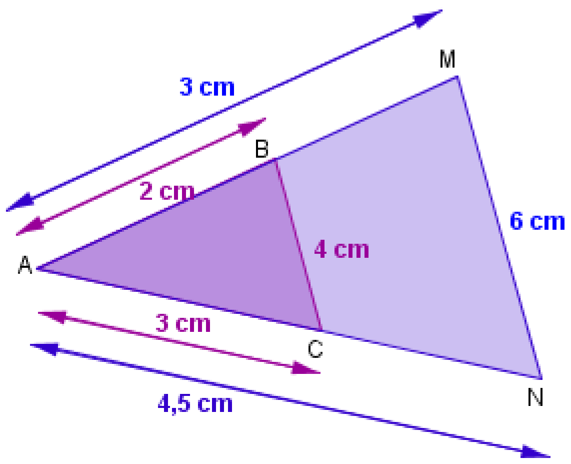
$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$ = 0,6. et

AM = AB$\times \mathbf{0,6}$ = 5 × 0,6 = 3 cm
AN = AC$\times \mathbf{0,6}$= 6 × 0,6 = 3,6 cm
MN = BC$\times \mathbf{0,6}$= 4 × 0,6 = 2,4 cm

Comme 0,6 <1, Le triangle ANM est donc une réduction du triangle ABC. Pour obtenir les longueurs du triangle AMN on a multiplié celle du triangle ABC par 0,6.

0,6 est le facteur de réduction.

Exemple 2 :



$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{2}$ = 1,5. et

AM = AB$\times \mathbf{1,5}$ = 2 × 1,5= 3 cm
AN = AC$\times \mathbf{1,5}$ = 3 × 1,5= 4,5 cm
MN = BC$\times \mathbf{1,5}$ = 4 × 1,5= 6 cm

Comme 1,5 > 1 , Le triangle ANM est donc un agrandissement du triangle ABC. Pour obtenir les longueurs du triangle AMN on a multiplié celle du triangle ABC par 1,5.

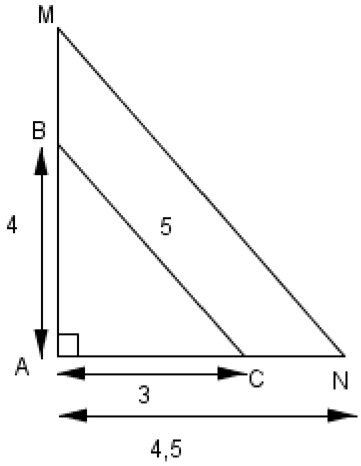
1,5 est le facteur d'agrandissment.

3) Propriétés

Si $\mathcal{F}$ ' est une réduction ou un agrandissement de facteur k d'une figure $\mathcal{F}$ alors :

- **Le périmètre de la figure $\mathcal{F}$ ' obtenue est égal au produit du périmètre de la figure $\mathcal{F}$ par le facteur k**
- **L'aire de la figure $\mathcal{F}$ ' obtenue est égal au produit de l'aire de la figure $\mathcal{F}$ par le facteur k²**

Exemple :



Le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC
1) Quel est le facteur d'agrandissement ?
2) Quel est le périmètre et l'aire du triangle ABC ?
3) En déduire le périmètre et l'aire du triangle AMN.

Réponse :

1) $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4,5}{3} = 1,5.$

Le facteur d'agrandissement est 1,5.

2) Périmètre du triangle ABC :

p = AB + AC + BC = 3 + 4 + 5= 12 cm.

Le périmètre du triangle ABC est 12 cm

Aire du triangle ABC : $A = \dfrac{3\times4}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

L'aire du triangle ABC est de 6 cm²

3) Le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC dont **le facteur est 1,5**.

Le périmètre du triangle AMN est donc le produit du périmètre du triangle ABC par 1,5

P = 12 × 1,5 = 18 cm **.Le périmètre du triangle AMN est 18cm**

L'aire du triangle AMN est donc le produit de l'aire du triangle ABC par $1,5^2$

P =$6\times 1,5^2 = 6\times 2,25 = 13,5$ cm² **.L'aire du triangle AMN est 13,5 cm²**

II) Le théorème de Thalès

1) Le théorème :

- **Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A**
- **Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles**

alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

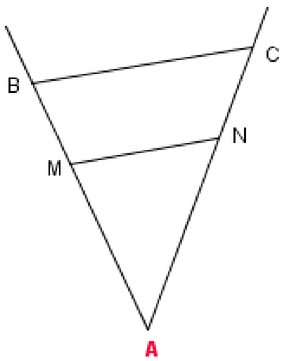


fig 1

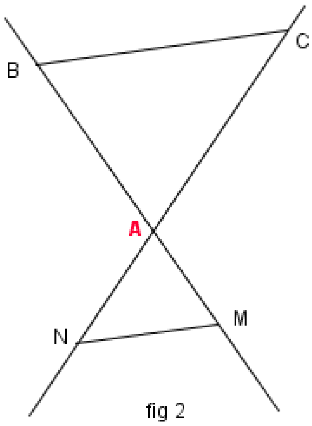


fig 2

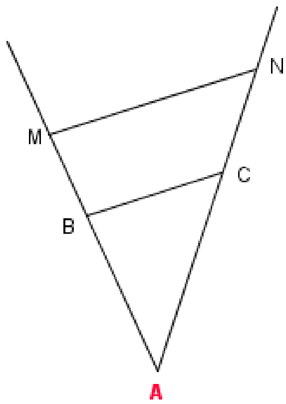


fig 3

Remarque :

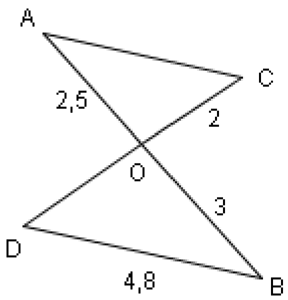
Dans la figure 1, le triangle AMN est une réduction du triangle ABC et le facteur de réduction k est :k = $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Dans la figure 3 , le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC et le facteur d'agrandissement k est :k = $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

2)Application :

a) Le théorème de Thalès sert à calculer une longueur

Exemple :



On sait que les droites (AC) et (DB) sont parallèles.
On donne OA= 2,5 cm ;OB = 3 cm ; OC = 2 cm et DB = 4,8 cm

Calculer OD et AC

1re étape :

Les droites **(AB)** et **(CD)** sont **sécantes en O**,
Les droites **(AC)** et **(BD)** sont **parallèles**,
On peut donc appliquer le **théorème de Thalès** :

On écrit l'égalité des rapports : $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$

2e étape :

On utilise les données numériques : $\frac{3}{2,5} = \frac{OD}{2} = \frac{4,8}{AC}$

3e étape :

On résout les équations qui permettent de calculer OD et AC :

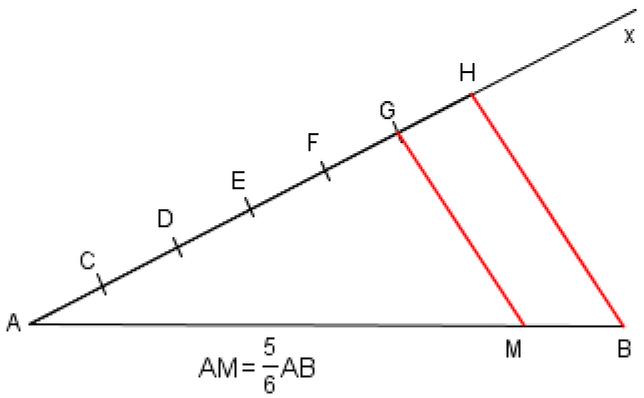
$\frac{3}{2,5} = \frac{OD}{2}$ on déduit $OD = \frac{3 \times 2}{2,5} = \frac{6}{2,5} = 2,4$ donc **OD = 2,4 cm**

$\frac{3}{2,5} = \frac{4,8}{AC}$ on en déduit $AC = \frac{4,8 \times 2,5}{3} = \frac{12}{3} = 4$ donc **AC= 4 cm**

b) Partage d'un segment

Exemple :

Soit [AB] un segment. Tracer à l'aide de la règle et du compas le point M tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{6}$



1) On trace une demi-droite [Ax)

2) On choisit une ouverture du compas et on trace sur [Ax) 6 segments consécutifs de même longueur à partir du point A. On note chaque point de [Ax) C ,D ,E ,F ,G et H

3) On trace la parallèle à la droite (HB) passant par le point G
(cinquième point en partant de la gauche) qui coupe le segment [AB] en M.

et on a bien $AM = \frac{5}{6} AB$

III) Réciproque du théorème de Thalès

• si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A
• si les points A ; B ; M d'une part et les points A ;C ; N d'autre part sont alignés dans le même ordre
• si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles

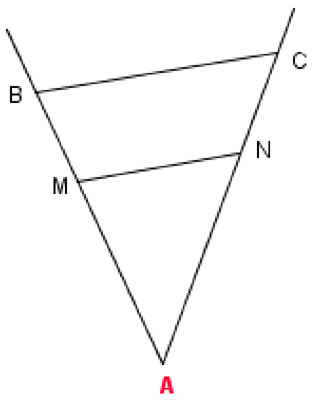


fig 1

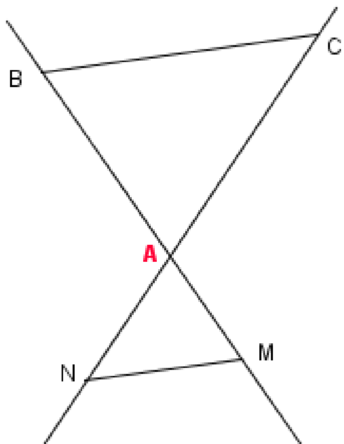


fig 2

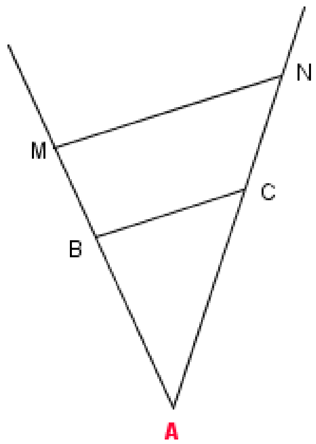
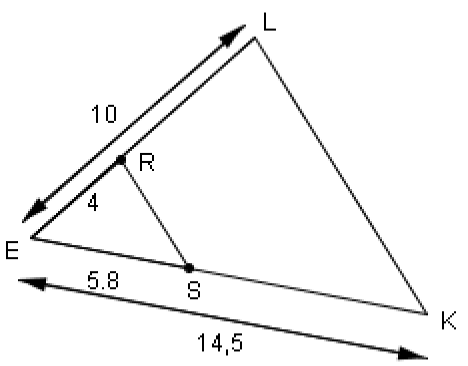


fig 3

Remarque :

La réciproque du théorème de Thalès sert à démontrer que deux droites sont parallèles

Exemple :



EL = 10 cm ; ER = 4 cm ES = 5,8 cm et EK = 14,5 cm.

Montrer que les droites (RS) et (LK) sont parallèles

1$^{\text{ère}}$ étape :

On vérifie d'abord que les points E, R, L et E ,S , K sont alignés dans le même ordre et que les droites (RL) et (SK) sont sécantes en E

2$^{\text{ème}}$ étape :

On calcule $\frac{ER}{EL}$ et $\frac{ES}{EK}$ puis on les compare.

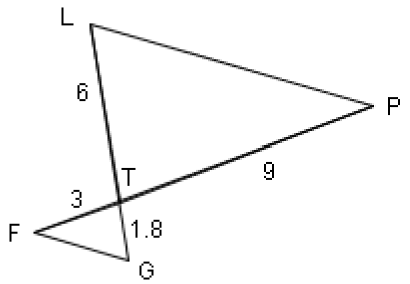
$$\left.\begin{aligned} \frac{ER}{EL} &= \frac{4}{10} = 0{,}4 \\ \frac{ES}{EK} &= \frac{5{,}8}{14{,}5} = 0{,}4 \end{aligned}\right\}$$

Donc $\frac{ER}{EL} = \frac{ES}{EK}$

D'après la **réciproque du théorème de Thalès**,
les droites **(SR) et (KL) sont parallèles**

IV) Comment prouver que des droites ne sont pas parallèles

Exemple :



TF = 3cm, TP = 9 cm TG = 1,8 cm et TL = 6.cm

Les droites (LP) et (FG) sont elles parallèles ?
Justifier

On calcule $\frac{\text{TF}}{\text{TP}}$ et $\frac{\text{TG}}{\text{TL}}$, puis on les compare.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\text{TP}}{\text{TF}} = \frac{9}{3} = 3 \\ &\frac{\text{TL}}{\text{TG}} = \frac{6}{1{,}8} = \frac{60}{18} = \frac{20}{6} \approx 3{,}3333... \end{aligned}\right\} \text{donc } \frac{\text{TP}}{\text{TF}} \neq \frac{\text{TL}}{\text{TG}}$$

Conclusion :

Les droites (FG) et (LP) ne sont pas parallèles.

Car si les droites (FG) et (LP) étaient parallèles alors on aurait $\frac{\text{TP}}{\text{TF}} = \frac{\text{TL}}{\text{TG}}$,

ce qui n'est pas le cas (Ce type de raisonnement s'appelle la contraposée du théorème)

Remarque :

A vue d'œil les droites semblent parallèles car la différence des rapports
n'est que de 0,333…