Trigonométrie dans un triangle rectangle

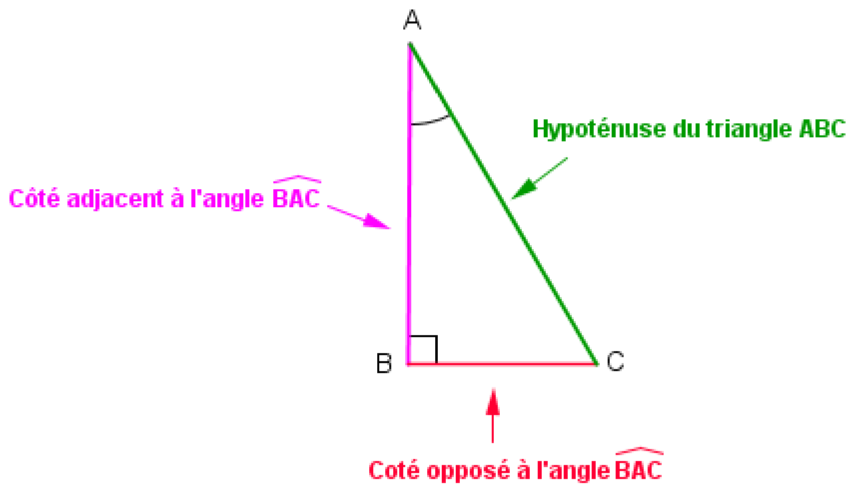
I) Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

1) Vocabulaire :

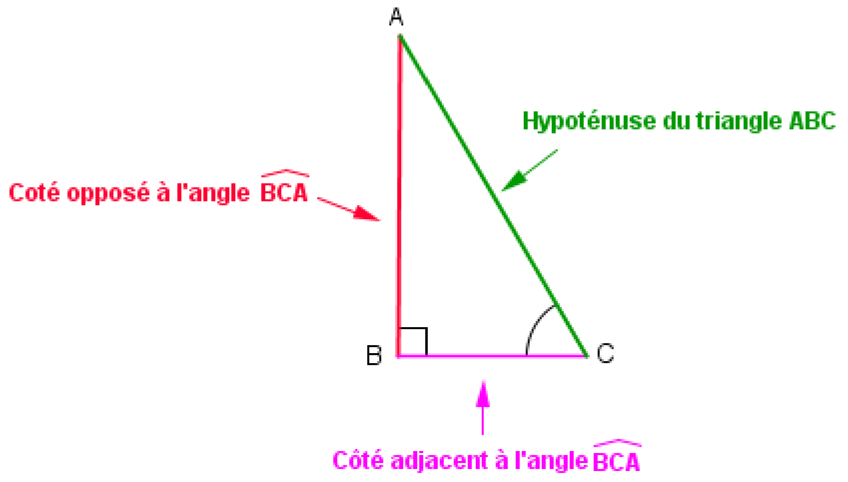
Dans un triangle rectangle : il faut savoir reconnaître :

Le côté adjacent à un angle aigu, **le côté opposé** à un angle aigu et **l'hypoténuse** de ce triangle rectangle :

1er cas possible :



2ème cas possible :



2) Formules du cosinus , du sinus et de la tangente d'un angle aigu :

a) Notation :

Le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ se note $\cos\ \widehat{ABC}$
Le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ se note. $\sin\ \widehat{ABC}$
La tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ se note tan $\widehat{ABC}$

b) définition:

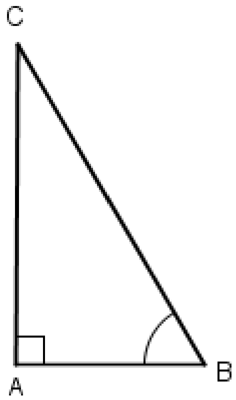
Dans un triangle rectangle, pour tout angle $\widehat{ABC}$ aigu on a :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}$$

Exemple :



Dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \qquad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

Remarque 1 :

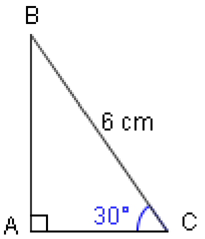
Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1 :
Le cosinus et le sinus d'un angle aigu est le quotient de deux longueurs, donc de deux nombres positifs de plus on divise par l'hypoténuse qui est le plus grand côté.

Remarque 2:

Le cosinus, le sinus et la tangente sont des outils qui permettent de calculer des longueurs de segments ou de calculer les mesures d'un angle

Exemple 1 : Pour calculer une longueur (on connait une longueur et la mesure d'un angle)

Dans le triangle ci-dessous calculer AB

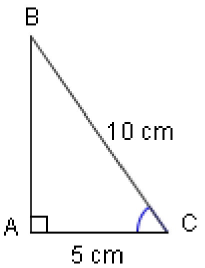


On connaît la longueur de **l'hypoténuse** et on cherche la longueur du **côté opposé à l'angle** connu. On applique donc la formule du **sinus**

Réponse : Dans le triangle ABC rectangle en A on a : $sin\,\widehat{BCA} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$

$sin\,30° = \frac{\mathrm{AB}}{6}$ donc $\mathrm{AB} = 6 \times \sin 30° = 6 \times 0{,}5 = 3\ \mathrm{cm}$ donc **AB = 3 cm**

Exemple 2 : Pour calculer un angle (on connait deux longueurs)
Dans le triangle ci-dessous calculer l'angle $\widehat{BCA}$



On connaît la longueur de **l'hypoténuse** et la longueur du **côté adjacent** à l'angle cherché .On applique donc la formule du **cosinus**

Réponse : Dans le triangle ABC rectangle en A on a **:** $cos\,\widehat{BCA} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$

$cos\,\widehat{BCA} = \frac{5}{10}$ = 0,5. On a donc $\mathbf{\widehat{BCA} = 60}$ °

à la calculatrice on tape « seconde cos 0,5 » pour les Casio
Ou : « 2nd PRB (trig) puis ⇨ »jusqu'à obtenir « <u>cos^{-1} » puis</u>
<u>« </u>0,5)=» pour les Texas Instrument

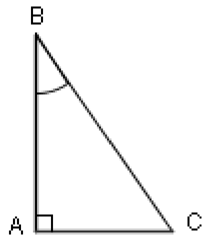
II) Relations entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu

1) Relation trigonométrique:

Propriété :

x est la mesure d'un angle aigu en degré :
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) Démonstration :



Dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$ donc

$\cos^2 \hat{B} = \frac{AB^2}{BC^2}$ $\sin^2 \hat{B} = \frac{AC^2}{BC^2}$

Comme ABC est un triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore nous avons : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ soit

$\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

Donc $\mathbf{\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1}$

3) Application :

Sachant que cos x =0,8, calculer la valeur exacte de sin x.

Réponse :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Donc $0{,}8^2 + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - 0{,}64$.

$\sin^2 x = 0{,}36$

$\sin x = \sqrt{0{,}36}$

Donc $\mathbf{\sin x = 0{,}6}$

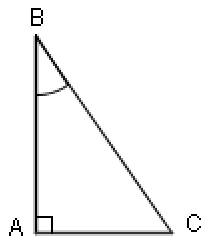
III) Relations entre le cosinus , le sinus et la tangente d'un angle aigu

1) Relation trigonométrique:

Propriété :

x est la mesure d'un angle aigu en degré : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2) Démonstration :



Dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$\cos \hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ $\sin \hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$

$\tan \hat{B} = \dfrac{AC}{AB}$ et

$$\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{\cancel{BC}} \times \frac{\cancel{BC}}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan \hat{B}.$$

On a donc $\dfrac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \tan \hat{B}$.

3) Application :

Sachant que $\cos x = 0,8$. Calculer la valeur exacte de tan x.

Réponse :

Dans l'exemple précédent nous avons vu que $\sin x = 0,6$. On a donc :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} = 0,75$$

On a donc : **$\tan x = 0,75$**