Ordre et opérations

I) Inégalités

1) Notations et définitions

a et b désignent deux nombres relatifs :

• « a < b » se lit « a est inférieur à b » ce qui signifie que le nombre a est plus petit que le nombre b

• « a > b » se lit « a est supérieur à b » ce qui signifie que le nombre a est plus grand que le nombre b

• « a $\leq$ b » se lit « a est inférieur ou égal à b » ce qui signifie que le nombre a est soit plus petit, soit égal au nombre b

• « a $\geq$ b » se lit « a est supérieur ou égal à b » ce qui signifie que le nombre a est soit plus grand, soit égal au nombre b

Exemple 1 :

On peut écrire que : $5 \geq 5$ car $5 = 5$ ou $7{,}5 \geq 5$ car 7,5 est plus grand que 5

Exemple 2 Ecrire tous les nombres entiers naturels x tel que $x \leq 4$:

On cherche tous les nombres entiers positifs plus petit ou égal à 4

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$.

Exemple 3 Ecrire tous les nombres entiers naturels x tel que $x < 3$:

On cherche tous les nombres entiers positifs plus petits que 3

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

Remarque :

$x > 0$ se traduit par **« x est strictement positif »** c'est-à-dire que le nombre x est positif mais il ne peut pas être égal à 0

$x < 0$ se traduit par **« x est strictement négatif »** c'est-à-dire que le nombre x est négatif mais il ne peut pas être égal à 0

2) Comparer deux nombres à partir de leur différence

• Dire que a < b revient à dire que a − b < 0

• Dire que a > b revient à dire que a − b > 0

• Dire que a $\geq$ b revient à dire que a − b $\geq$ 0

• Dire que a $\leq$ b revient à dire que a − b $\leq$ 0

Exemple 1 :

On sait que $x - y = 3$ Comparer x et .

$x - y = 3$ alors on sait que $x - y > 0$ on peut donc en déduire que $x > y$.

Exemple 2 :

On sait que $x > 7$ Quelle est le signe de $x - 7$?

$x > 7$ alors $x - 7 > 0$

II) Ordre et opérations

1) Addition

Si on additionne les deux membres d'une inégalité par un même nombre on ne change pas le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a, b et c:

Si a < b alors a + c < b + c

Exemple 1 : On sait que $x < 12$ alors $x + 15 < 12 + 15$ soit $x + 15 < 27$

Exemple 2 : x est un **nombre entier positif** tel que $x - 3 \leq 2$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

Comme $x - 3 \leq 2$.alors

$x \underbrace{-3 + 3} \leq \underbrace{2 + 3}$

$x + \quad 0 \quad \leq \underbrace{5}$

$x \leq 5$

Donc $x \leq 5$. Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 5

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

2) Soustraction

Si on soustrait les deux membres d'une inégalité par un même nombre on ne change pas le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a, b et c:

Si a < b alors a - c < b −c

Exemple 1 : On sait que $x < 10$ alors $x - 12 < 10 - 12$ soit $x - 12 < -2$

Exemple 2 : x est **un nombre entier positif** tel que $x + 5 \leq 8$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

Comme $x + 5 \leq 8$. alors

$x + \underbrace{5 - 5} \leq 8 - 5$

$x + \underbrace{0} \leq 3$

$x \leq 3$

Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 3
Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

3) Multiplication

Propriété 1 :

Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif on ne change pas le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a, b et c:

Si a < b et c > 0 alors $\mathbf{a} \times \mathbf{c} < b \times \mathbf{c}$

Exemple 1 :

On sait que $x \leq 5$ alors $x \times 7 \leq 5 \times 7$ c'est-à-dire $7x \leq 35$

Exemple 2 :

x est un nombre entier positif tel $\frac{x}{3} \leq 2$.Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

$\frac{x}{3} \leq 2$ donc :

$\frac{x \times 3}{3} \leq 2 \times 3$ C'est-à-dire :

$x \leq 6$

Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 6

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2, 3. 4, 5 et 6.

Propriété 2 :

Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif on change le sens de l'inégalité

C'est-à-dire :

Si a < b et c<0 alors a $\times$ c > b$\times$ c

Exemple 1 :

On sait que $x < 5$ alors $x \times (-3) > 5 \times (-3)$c'est-à-dire $-3x > -15$

Exemple 2 :

x est un **nombre entier négatif** tel que $\frac{x}{-2} \leq 3$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

$\frac{x}{-2} \leq 3$ donc :

$\frac{x \times (-2)}{-2} \geq 3 \times (-2)$. C'est-à-dire :

$x \geq -6$

Comme le nombre x est un nombre entier négatif supérieur ou égal à -6

Les solutions possibles sont : -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0.

III) Troncature et arrondi

1) Troncature d'un nombre décimal

Définition :

Donner la troncature à un rang donné, d'un nombre décimal revient à couper ce nombre au rang indiqué et à supprimer les chiffres à droite de cette coupure.

Exemple 1 :
Donner la troncature à l'unité de :78,958

Coupure

78 ,| 958

Chiffre
des unités

On supprime les chiffres
à droite de la coupure

La troncature à l'unité de 78,958 est 78

Exemple 2 :
Donner la troncature au dixième de : 78,958

Coupure

78, **9** | 58

Chiffre des dixièmes

On supprime les chiffres à droite de la coupure

La troncature au dixième de 78,958 est 78,9

2) Arrondi

Définition :

Pour arrondir un nombre à un rang donné :

1) On tronque d'abord le nombre au rang indiqué

2) On regarde le chiffre qui suit la troncature :
• Si ce chiffre est inférieur à 5 on garde le nombre tronqué.
• Si ce chiffre est supérieur ou égal à 5, on augmente de 1 le dernier chiffre de la troncature

Exemple 1 : Donner l'arrondi au centième de 13,45214 :

$\underbrace{13,45}_{\text{troncature au centième du nombre}}$ 2 14

Le chiffre qui suit la troncature au centième est 2 (qui est inférieur à 5)

Dans ce cas l'arrondi au centième est aussi 13, 45

Exemple 2 : Donner l'arrondi au dixième de 13,464 :

$\underbrace{13,4}_{\text{troncature au dixième du nombre}}$ 6 4

Le chiffre qui suit la troncature au dixième est 6 (qui est supérieur à 5)

On rajoute 1 au dernier chiffre de la troncature : 4 + 1 = 5

Dans ce cas l'arrondi au dixième est 13, 5

Exemple 3 : Donner l'arrondi au dixième de 8,45214 :

$\underbrace{8,4}_{\text{troncature au dixième du nombre}}$ 5 214

Le chiffre qui suit la troncature au dixième est 5

On rajoute 1 au dernier chiffre de la troncature : 4 + 1 = 5

Dans ce cas l'arrondi au dixième est aussi 8, 5

Exemple 4 : Donner l'arrondi au dixième de 8,96 :

$\underbrace{8,9}_{\text{troncature au dixième du nombre}}$ 6

Le chiffre qui suit la troncature au dixième est 6

On rajoute 1 au dernier chiffre de la troncature : 9 + 1 = 10 et 10 dixièmes est égal à une unité : 8 + 1 = 9

Dans ce cas l'arrondi au dixième est 9,0

III) Encadrement

1) Définition :

a, b et x désignent des nombres relatifs.(a est plus petit que b)

Lorsque l'on écrit :

a < x < b ou a $\leq x$ < b ou a < $x \leq$ b ou a $\leq x \leq$ b

on dit que le nombre x est encadré par les nombres a et b,

et la différence b – a est l'amplitude de cet encadrement

2) Encadrer à partir de la troncature

Exemple 1 Donner un encadrement de $\frac{53}{21}$ d'amplitude 0, 001.

La troncature au millième de ce nombre est 2,523 donc

2,523 < $\frac{53}{21}$ < 2,524 .C' est un encadrement au millième de $\frac{53}{21}$.

Exemple 2 : Donner un encadrement du nombre a dont la troncature au dixième est 86,7 :

86,7 $\leq$ a < 86,8

3) Encadrer à partir de l'arrondi

Exemple 1: Donner un encadrement du nombre b dont l'arrondi au dixième est 9,6

9,55 $\leq$ b < 9 ,65

Exemple 2 : Donner un encadrement du nombre c dont l'arrondi au centième est 7,42

7,415 $\leq$ a <7 ,425