Proportionnalité

I) Proportionnalité et produit en croix

1) Propriété

Pour tous nombres a b c et d non nuls, le tableau ci-dessous représente une situation de proportionnalité. Dans ce cas on a :

a	c
b	d

Dans ce cas on a :

$a \times d = b \times c$

Dire qu'un tableau représente une situation de proportionnalité revient à dire que les produits en croix sont égaux

2) Exemples

Exemple 1 :

3	2	7
4,5	3	10,5

Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité
Le coefficient de proportionnalité est 1,5 et on a :

$3\times3 = 4{,}5\times2 = 9$ et
$2\times10{,}5 = 3\times7 = 21$

Exemple 2 : Le tableau ci-dessous est-il un tableau de proportionnalité ?

7	14,7
9	18,9

Les produits en croix nous donnent :
$7\times18{,}9 = 132{,}3$
$9\times14{,}7 = 132{,}3$

On a donc $7\times18{,}9 = 9\times14{,}7$. Les produits en croix sont bien égaux.

Le tableau ci-dessus est bien un tableau de proportionnalité

Exemple 3 : Le tableau ci-dessous est-il un tableau de proportionnalité ?

7	2
20	6

Les produits en croix nous donnent :
$7\times 6 = 42$
$20\times 2= 40$

On a donc $7\times 6 \neq 20\times 2$. Les produits en croix ne sont pas égaux.

Le tableau ci-dessus n'est pas un tableau de proportionnalité

3) Produit en croix et fraction

Propriété :

Si les nombres b et d sont non nuls :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **revient à dire que** $a \times d = b \times c$

Ce qui revient à dire aussi que :

Deux fractions sont égales lorsque les numérateurs sont proportionnels aux dénominateurs

Exemple :

$\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$ revient à dire que $7\times 12 = 21\times 4 = 84$

Ce qui revient à dire aussi que le tableau ci -dessous est un tableau de proportionnalité

×3

Numérateurs	7	21
Dénominateurs	4	12

×3

4) Comment déterminer une quatrième proportionnelle en utilisant le produit en croix

Exemple : Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

5	1,5
9	x

On sait que $5 \times x = 9 \times 1{,}5$ ce qui donne :

$x = \frac{1{,}5 \times 9}{5} = 2{,}7$

Donc $x = 2{,}7$

II) Représentation graphique et proportionnalité

Lorsque l'on représente graphiquement une situation de proportionnalité on remarque que les points sont alignés avec l'origine du repère .

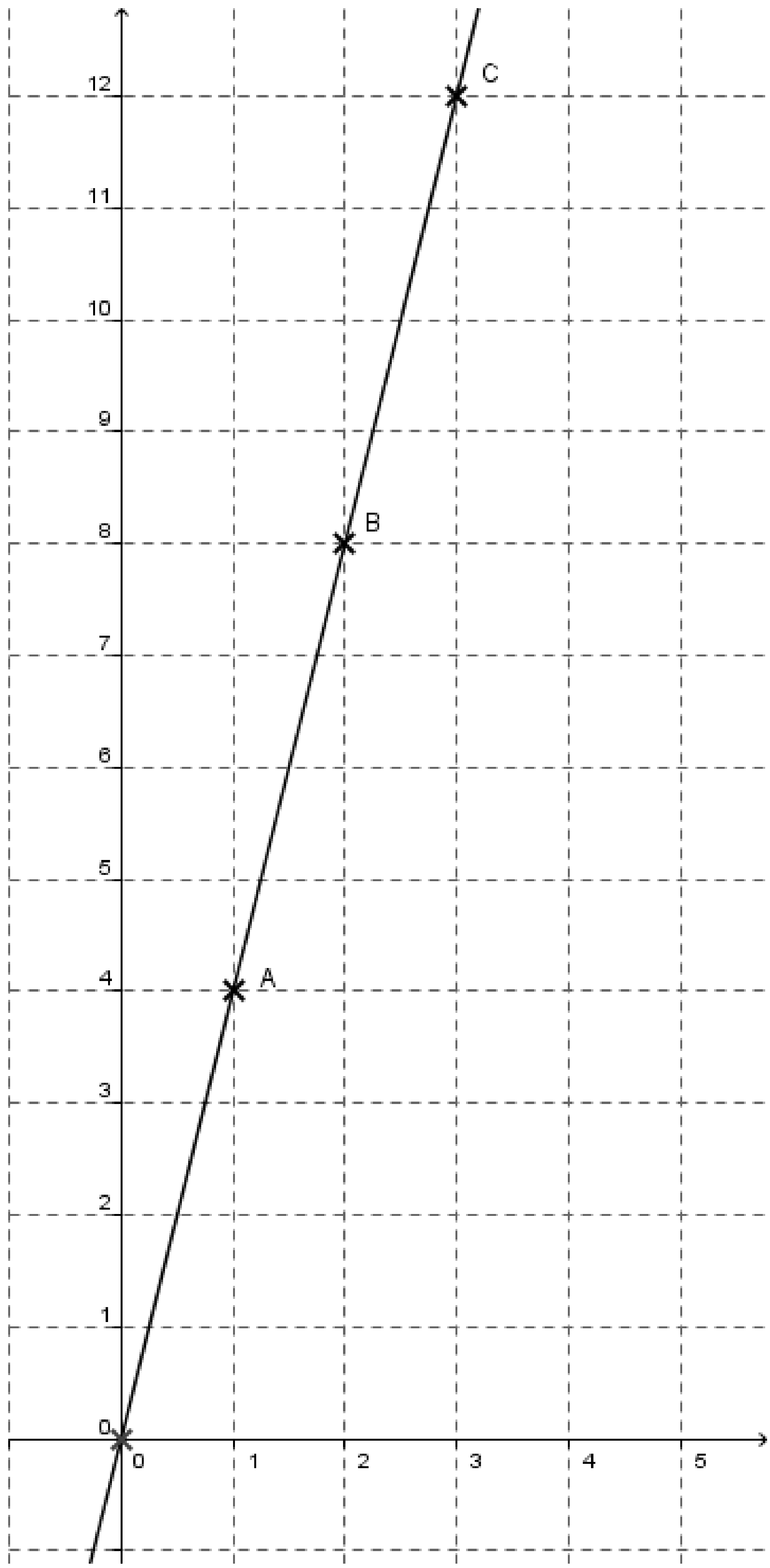
Exemple 1 : Voici un tableau représentant le périmètre d'un carré en fonction de la longueur de ses côtes.

Longueur des côtés d'un carré	2	3	7,5	9
Périmètre de ce carré	8	12	30	36

$\times 4$

Ce tableau représente une situation de proportionnalité dont le coefficient est 4

La représentation graphique de ce tableau est :



Les points sont alignés avec l’origine O du repère

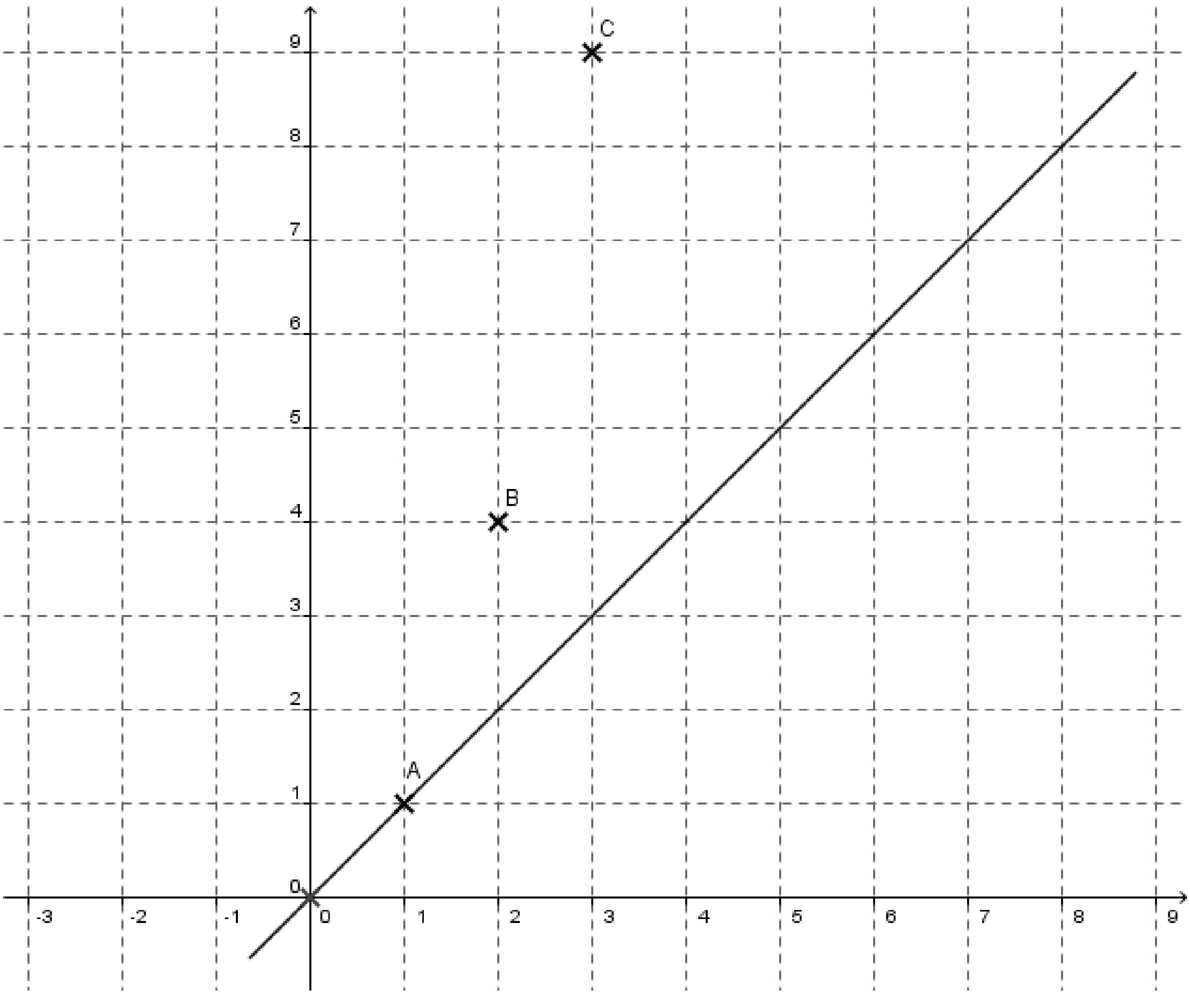
Exemple 2 Voici un tableau représentant l'aire d'un carré en fonction de la longueur de ses côtes.

Longueur des côtés d'un carré	1	2	3
Aire de ce carré	1	4	9

Ce tableau ne représente pas une situation de proportionnalité car : $1 \times 4 \neq 2 \times 1$

(On applique le produit en croix)

La représentation graphique de ce tableau est :



Les points ne sont pas alignés avec l'origine O du repère

III) Vitesse

1) Définition et unités

Définition :

Si un objet se déplace d'une distance d pendant une durée t alors le quotient : v = $\frac{d}{t}$ est la vitesse moyenne de cet objet

Remarque :

Dans ce cas la distance d du parcours est proportionnelle à la durée t du trajet.

Exemple : La vitesse moyenne d'un mobile est de 105 km/h., ce qui veut dire :

Il a parcouru 105 km en 1 heure, comme la distance du parcours est proportionnelle à la durée du trajet on peut dire aussi :

Il a parcouru 210 km en 2 heures ou encore :

Il a parcouru 315 km en 3 heures…..

Remarque : Il en résulte les formules suivantes :

$$t = \frac{d}{v} \quad \text{et} \quad d = v \times t$$

2) Unités

L'unité de la vitesse est en général en kilomètre par heure noté : km/h ou km.h^{1}

ou en mètre par seconde noté : m/s. ou m.s^{-1}

v (km/h) = $\frac{d\ (km)}{t\ (h)}$ ou v (m/s) = $\frac{d\ (m)}{t\ (s)}$

3) Exemples

Exemple 1 : Une voiture parcourt 150 km en 3 heures. Quelle est sa vitesse moyenne ?

v = $\frac{d}{t}$

v = $\frac{150}{3}$ = 50

Sa vitesse moyenne est de 50 km/h

Exemple 2 Une voiture a une vitesse moyenne de 90 km/h. Elle parcourt 180km. Quelle est la durée du parcours ?

On peut utiliser deux méthodes pour résoudre ce problème

1ère méthode : On applique la formule: $\boldsymbol{t = \frac{d}{v}}$. Soit t = $\frac{180}{90}$ = 2

La durée du parcours est de 2 heures.

2ème méthode : On utilise la définition : on sait que : la distance du parcours est proportionnelle à la durée du trajet. On fait le tableau de proportionnalité suivant :

90 km/h veut dire qu'il parcourt 90 km en 1 heure

Distance (km)	90	180
Temps (h)	1	x

On applique le produit en croix x = $\frac{180 \times 1}{90}$ = 2.

La durée du parcours est de 2 heures.

Exemple 3 Une voiture a une vitesse moyenne de 100 km/h. La durée du parcours est de 2 h 30 min. Quelle est la distance parcourue ?

t = 2 h 30 min = 2,5 h

1ère méthode : On applique la formule: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{t}$. Soit : $d = 100 \times 2{,}5 = 250$

La distance du parcours est de 250 km.

2ème méthode :

On utilise la définition : on sait que : la distance du parcours est proportionnelle à la durée du trajet. On fait le tableau de proportionnalité suivant :

100 km/h veut dire qu'il parcourt 100 km en 1 heure

Distance (km)	100	x
Temps (h)	1	2,5

On applique le produit en croix x = $\frac{100 \times 2{,}5}{1}$ = 250

La distance du parcours est de 250 km.

IV) Conversion

Exemple 1 Convertir 150 km/h en m/s

Pour avoir une vitesse en mètre par seconde il suffit de convertir les distances en mètre et le temps en seconde :

150 km/h veut dire que le mobile parcourt une distance de 150 km en 1 heure

150 km = **150 000 m**

1h = **3600s**

v = $\frac{d}{t} = \frac{150\ 000}{3\ 600} \approx 42$ **La vitesse est donc d'environ 42 m/s**

Exemple 2 Convertir des $m.s^{-1}$ en $km.h^{-1}$

Convertir 36 $m.s^{-1}$ en $km.h^{-1}$

Pour avoir une vitesse en kilomètre par heure il suffit de convertir les distances en kilomètre et le temps en heure :

36 $m.s^{-1}$ veut dire que le mobile parcourt une distance de 36 m en 1 seconde

36 m = 0,036 km

1 s $\approx$ 0,00027777777....h

v = $\frac{d}{t} = \frac{0{,}036}{0{,}00027777777\ldots} \approx 129{,}6$ **La vitesse est donc d'environ 130 $km.h^{-1}$**

V) Pourcentage

1) Définition

Calculer t % d'un nombre revient à multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$

Remarque : Un pourcentage représente aussi une situation de proportionnalité

Exemple 1 : Calculer 60% de 541€ :

$541 \times \frac{60}{100} = 541 \times 0{,}6 = 324{,}6$ **donc 60% de 541€ représente 324,60 €**

Exemple 2 Calculer 50% de 126€ :

$126 \times \frac{50}{100} = 126 \times 0{,}5 = 63$ **donc 50% de 126€ représente 63 €**

2) Propriété

Un pourcentage traduit une situation de proportionnalité

3) Calculer un pourcentage relatif à la réunion de deux groupes

Exemple :

Dans un collège il y a 3 classes de $4^{\text{ème}}$

La classe de $4^{\text{ème}}$ 1 est composée de 24 élèves dont 75 % d'entre eux ont pris l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue

La classe de $4^{\text{ème}}$ 2 est composée de 30 élèves dont 90 % d'entre eux ont pris l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue

La classe de $4^{\text{ème}}$ 3 est composée de 25 élèves dont 64 % d'entre eux ont pris l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue.

Quel est le pourcentage pour l'ensemble des $4^{\text{èmes}}$ qui ont pris l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue ?

Pour la classe de 4ème 1 : $\frac{24\times75}{100} = 18$

18 élèves de $4^{\text{ème}}$1 pratiquent l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue

Pour la classe de 4ème 2 : $\frac{30\times90}{100} = 27$

27 élèves de $4^{\text{ème}}$2 pratiquent l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue

Pour la classe de 4ème 3 : $\frac{25\times64}{100} = 16$

16 élèves de $4^{\text{ème}}$3 pratiquent l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue

Le nombre total d'élèves de l'ensemble des 4èmes est :

24 + 30 + 25 = 79

Dans ce collège, il y a 79 élèves en 4ème.

Le nombre total d'élèves de l'ensemble des 4èmes, qui pratiquent l'anglais en 1ère langue, est :

18 + 27 + 16 = 61

Il y a 61 élèves de l'ensemble des 4èmes qui pratiquent l'anglais en 1ère langue est :

Le pourcentage est donc : $\frac{61}{79} \times 100 = 77$

Le pourcentage pour l'ensemble des $4^{\text{èmes}}$ qui ont pris l'anglais en $1^{\text{ère}}$ langue est d'environ 77 %