Puissances d'exposant entier relatif

I) Puissances d'un nombre relatif

1) Puissances d'exposant positif

a) Définition

Le nombre a est un entier relatif et
le nombre n est un entier supérieur ou égal à 1

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots\ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$ **De plus :** $a^1 = a$ **et**

pour $a \neq 0$ **on a :** $a^0 = 1$

$a^n =$ **se lit « a exposant n ».**

Les cas particuliers sont :

a^2 **se lit « a au carré »**

a^3 **se lit « a au cube »**

b) Exemples :

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
$19999^0 = 1$

$2000^1 = 2000$
$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$

2) Puissances d'exposant négatif

a) Définition

Le nombre a est un entier relatif différent de 0 et le nombre n est un entier supérieur ou égal à 1 :
L'inverse de a^n se note a^{-n} et on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

b) Exemples :

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5) \times (-5) \times (-5)} = \frac{1}{625} = 0{,}0016$$

II) Méthode de calcul

1) Pour calculer un produit de deux puissances d'un même nombre :

a) Propriétés :

Le nombre *a* est un nombre relatif, m et n sont des entiers relatifs :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

b) Méthode et exemple:

Ecrire A sous la forme d'une seule puissance de 5

A = $\underbrace{5^2} \times \underbrace{5^4}$

A = $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ⟵ On compte le nombre de facteurs 5: Il y en a 6

Il y a 6 facteurs

Donc **A =** 5^6 ⟵ On donne le résultat

2) Pour calculer un quotient de deux puissances d'un même nombre :

a) Propriétés :

Le nombre *a* est un nombre relatif, m et n sont des entiers relatifs :

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

b) Méthode et exemples:

Exemple 1 : Ecrire A sous la forme d'une seule puissance de 5

A = $\frac{5^6}{5^2}$

A = $\frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times5\times5\times5\times5}{\cancel{5}\times\cancel{5}}$ ⟵ On décompose chaque puissance en un produit et on simplifie les fractions

A = $\frac{5^4}{1}$ = 5^4 ⟵ On compte le nombre de facteurs 5 : **Il en reste 4**

Donc **A = 5^4** ⟵ On donne le résultat

Exemple 2 Ecrire B sous la forme d'une seule puissance de 3

B = $\frac{3^4}{3^7}$ = $\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times3\times3\times3}$ = ⟵ On décompose chaque puissance en un produit et on simplifie les fractions

B = $\frac{1}{3^3}$ ⟵ On compte le nombre de facteurs 3 : **Il en reste 3**

Donc **B = 3^{-3}** ⟵ On donne le résultat

3) Pour calculer un produit d'une même puissance de deux nombres:

a) Propriétés :

Les nombres a et b sont des nombres relatifs et n est un entier relatif :
$\boldsymbol{a^m \times b^m = (a \times b)^m}$

b) Méthode et exemple:

Ecrire A sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n un entier relatif

A = $\underbrace{5^3}$ $\times$ $\underbrace{2^3}$

A = $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$ ⟵ On décompose chaque puissance en un produit

A = $(5 \times 2) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2)$ ⟵ On change l'ordre des facteurs et on les regroupe de façon à obtenir un produit de trois facteurs identiques

A = $10 \times 10 \times 10$

A = 10^3 ⟵ On écrit le produit obtenu sous la forme d'une puissance d'un nombre

III) Règle de priorité :

En l'absence de parenthèses, on calcule d'abord les puissances avant d'effectuer les autres opérations (multiplications, divisions, additions et soustractions)

On effectue ensuite les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions.

En présence de parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses

Exemple 1 :

A = $5 \times 7^3 = 5 \times 343 = 1715$ → On calcule d'abord les puissances

Exemple 2 :

B = $(5+2)^3 = 7^3$ → On effectue d'abord les calculs entre parenthèses

B = 7^3 = 343

B = 343

IV) Signe d'une puissance d'exposant entier relatif d'un nombre

1) Propriété

Une puissance d'un nombre positif est un nombre positif

Une puissance d'exposant pair d'un nombre négatif est un nombre positif

Une puissance d'exposant impair d'un nombre négatif est un nombre négatif

2) Exemples

$(-7)^3$ est un nombre négatif car son exposant est 3 qui est impair. $(-7)^3$ -343
$(-3)^4$ est un nombre positif car son exposant est 4 qui est pair. $(-3)^4 = 81$

V) Les puissances de 10

1) définition :

Quelque soit l'entier positif n supérieur ou égal à 1 :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \ldots \ldots . \times 10}_{\textbf{n facteurs}} = \underbrace{100\ldots\ldots0}_{\textbf{n}\text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots\ldots.01}_{\textbf{n}\text{ zéros}}$$

et $10^0 = 1$

Exemples :

$10^3 = \underbrace{1000}_{3\text{ zéros}}$ $\qquad$ $10^{-4} = \underbrace{0{,}0001}_{4\text{ zéros}}$ $\qquad$ $10^{-1} = \underbrace{0{,}1}_{1\text{ zéro}}$

2) propriétés :

n et m sont deux entiers relatifs :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

$$(10^m)^n = 10^{m\times n}$$

Exemples :

$10^4 \times 10^9 = 10^{(4+9)} = 10^{13}$ $\qquad$ $\dfrac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$ $\qquad$ $(10^4)^3 = 10^{4\times3} = 10^{12}$

3) Notation scientifique

Définition :

Un nombre positif est écrit en notation scientifique quand il est écrit sous la forme : $a \times 10^n$ **où :**

- **a est un nombre décimal tel que** $1 \leq a < 10$ **et**
- **n est un entier relatif**

Exemples :

$7{,}45 \times 10^4$ et $1{,}02 \times 10^{-5}$ sont des écritures scientifiques.

Par contre $0{,}4 \times 10^{-5}$ et $11{,}3 \times 10^{-8}$ne sont pas des écritures scientifiques, pour les mettre sous la forme d'une écriture scientifique, il suffit de décaler la virgule pour que le nombre devant la puissance de 10 soit compris entre 1 et 10 :

$0{,}4 \times 10^{-5} = 0{,}4 \times 0{,}00001 = 0{,}0000004 = 4 \times 10^{-6}$ et 4×10^{-6} est une écriture scientifique.

$11{,}3 \times 10^{-8} = 11{,}3 \times 0{,}00000001 = 0{,}000000113 = 1{,}13 \times 10^{-7}$

Remarque 1 : On peut obtenir la notation scientifique d'un nombre décimal différent de zéro en utilisant la calculatrice

Remarque 2 : On utilise l'écriture scientifique dans de nombreux domaines :
Dans les sciences physiques, en astronomie, en S.V.T….