Théorème de Thalès dans un triangle. Agrandissement et réduction

I) Théorème de Thalès dans un triangle

1) Propriété :

Dans un triangle ABC si

• M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC]

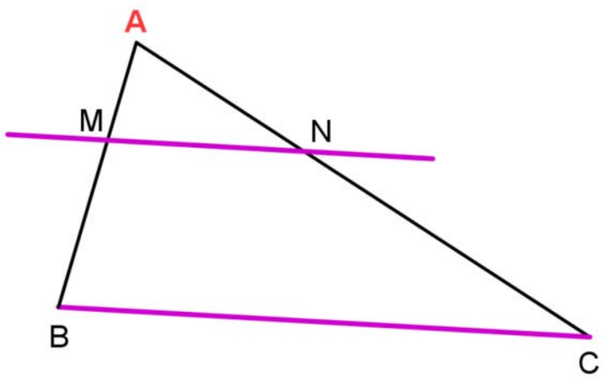
• si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Côtés du « petit » triangle AMC

Côtés du « grand » triangle ABC

Remarque : On peut dire aussi que les longueurs des côtés du traingle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC



Objectif : Cette propriété sert à calculer des longueurs

Remarque : Le théorème de Thalès dans toute sa généralité sera étudié en classe de troisième. Seul le cas particulier , du triangle est vu en classe de quatrième.

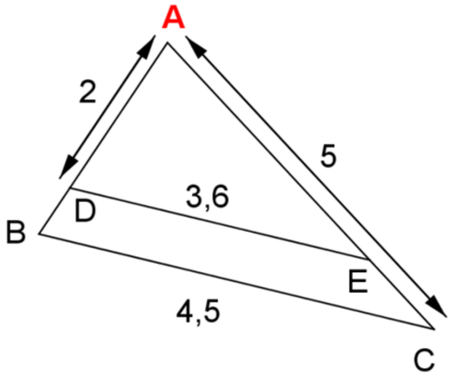
2) Exemple

Dans le triangle ABC, le point D appartient au segment [AB] et le point E au segment [AC]

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles

AC= 5 cm ; DE = 3,6 cm , BC = 4,5 cm et AD = 2 cm

Calculer la longueur AB



• **On reconnaît** les données pour appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABC:

Dans le triangle ABC, le point D appartient au segment [AB] et le point E au segment [AC]

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles

On a alors : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

• **On choisit l'égalité** pour cela il faut connaître 3 longueurs sur les 4

On connaît les longueurs DE, BC et AC et on cherche la longueur AE

• On **remplace dans la formule, les lettres par les valeurs données :**

$\frac{AE}{5} = \frac{3,6}{4,5}$ on, applique le produit en croix :

AE = $\frac{5 \times 3,6}{4,5}$ = 4 **Donc AE =4 cm**

• On connaît les longueurs DE, BC et AD et on cherche la longueur AB

$\frac{2}{AB} = \frac{3,6}{4,5}$ on applique le produit en croix

AB = $\frac{2 \times 4,5}{3,6}$ = 2,5 AB **Donc AB = 2,5 cm**

II) Agrandissement et Réduction

1) Définition

Une figure ou un objet est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure ou d'un autre objet lorsque leurs longueurs sont proportionnelles

2) Propriétés

• Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux figures ou objets est supérieur à 1 alors c'est un agrandissement

• Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux figures ou objets est inférieur à 1 alors c'est une réduction

Ce qui revient à dire:

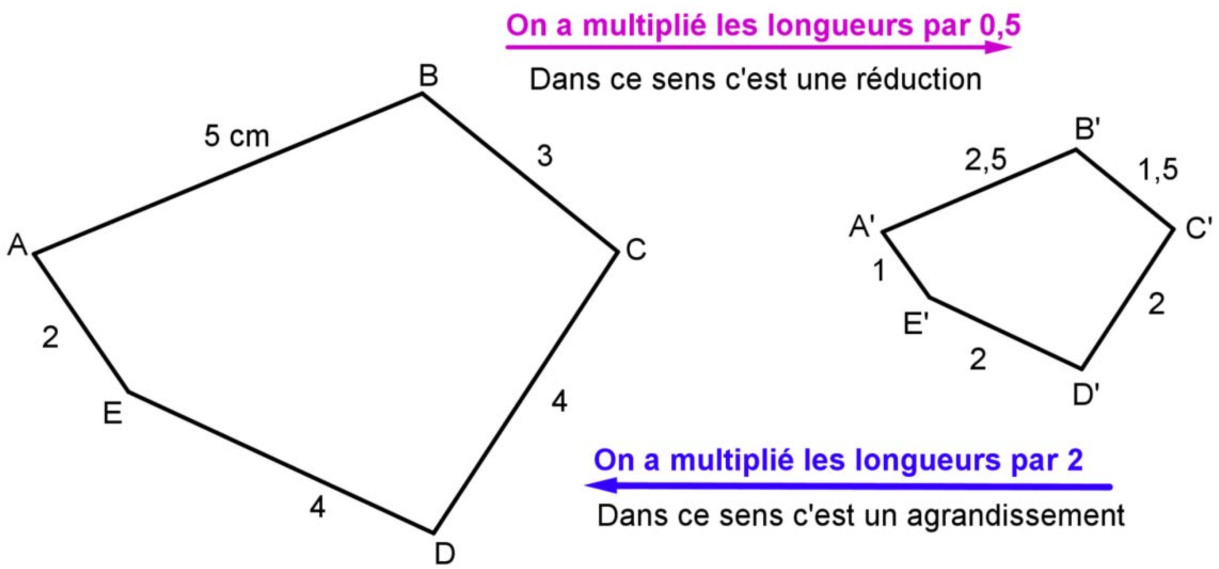
Lorsqu'on multiplie par un même nombre k positif toutes les longueurs d'une figure $\mathcal{F}$ pour obtenir les longueurs de la figure $\mathcal{F}'$ alors :

$\mathcal{F}'$ est un agrandissement si $k > 1$

$\mathcal{F}'$ est une réduction si $k < 1$

Exemples :

Exemple 1 :



- $\frac{A'B'}{AB} = \frac{2,5}{5}$ = **0,5** $\quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{1,5}{3}$ = **0,5** $\quad \frac{C'D'}{CD} = \frac{2}{4}$ = **0,5**

  $\frac{D'E'}{DE} = \frac{2}{4}$ = **0,5** $\quad \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2}$ = **0,5**

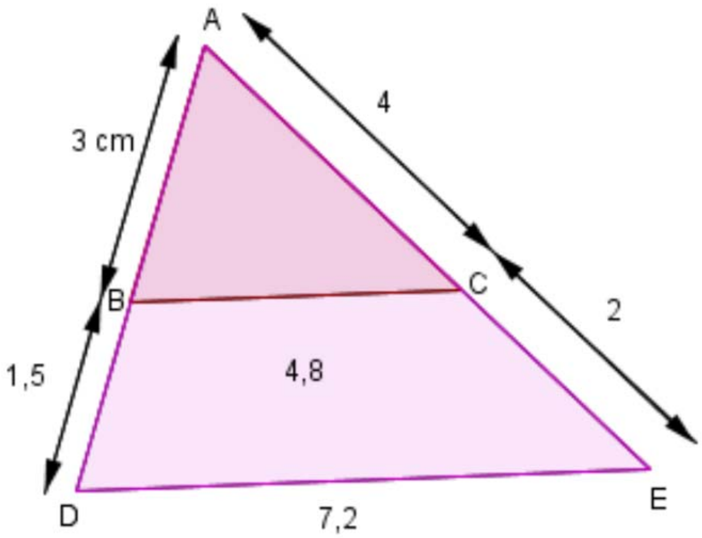
A'B'C'D'E' est une réduction du pentagone ABCDE de rapport 0,5.

- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{5}{2,5}$ = **2** $\quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{1,5}$ = **2** $\quad \frac{CD}{C'D'} = \frac{4}{2}$ = **2**

  $\frac{DE}{D'E'} = \frac{4}{2}$ = **2** $\quad \frac{EA}{E'A'} = \frac{2}{1}$ = **2**

ABCDE est un agrandissement du pentagone A'B'C'D'E' de rapport 2.

Exemple 2 :



Nous allons montrer que les longueurs des triangles ABC et ADE sont proportionnelles.

AB = 3 cm ; AD = 3 + 1, 5 = 4,5 cm. De plus $\frac{AD}{AB} = \frac{4,5}{3}$ = 1,5

AC = 4 cm ; AE = 4 + 2 = 6 cm et AC × 1,5 = 6 cm

BC = 4,8 cm ; DE = 7,2 cm et 4,8 × 1,5 = 7,2 cm

Les longueurs des triangles ABC et ADE sont proportionnelles. De plus le coefficient est supérieur à 1.

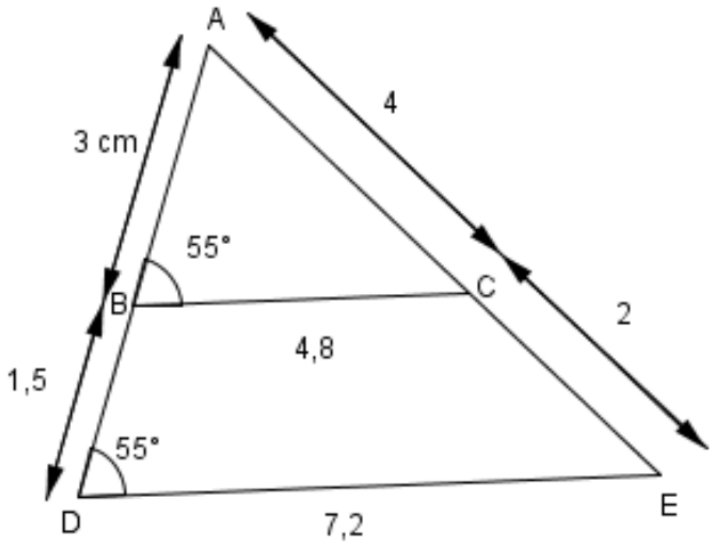
Le triangle ADE est donc un agrandissement du triangle ABC de rapport 1,5.

3) Propriétés

a) Conservation des mesures d'angle

Les agrandissement et réductions conservent les mesures d'angles

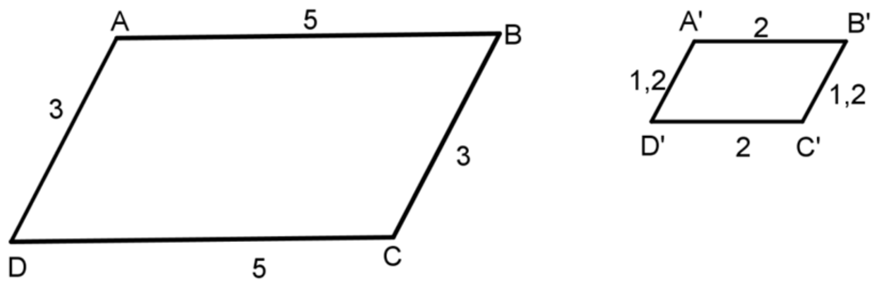
Exemple :



Nous avons vu précédemment que Le triangle ADE est un agrandissement du triangle ABC
Si l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 55 ° alors l'angle $\widehat{ADE}$ mesure aussi 55°.

b) Conservation du parallélisme

Les agrandissement et réductions conservent le parallélisme



Le parallélogramme A'B'C'D' est une réduction du parallélogramme ABCD de rapport 0,4.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Il en résulte que les droites (A'B') et (C'D') sont aussi parallèles.