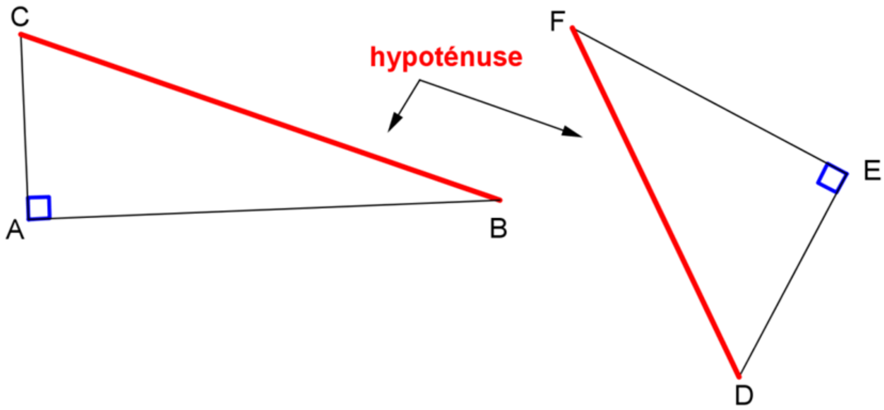
Triangle rectangle :
Cercle circonscrit et médiane

I) Vocabulaire

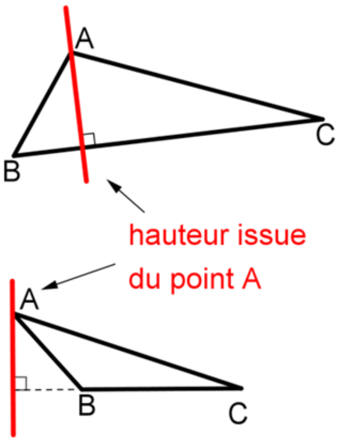
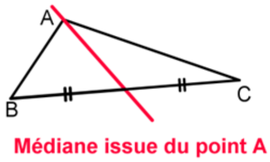
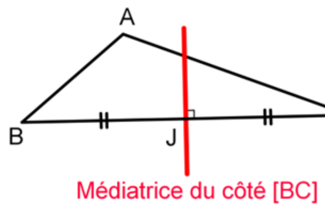
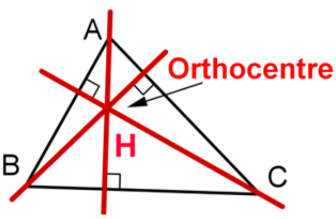
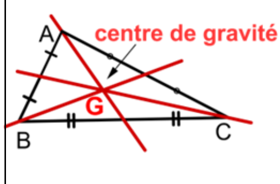
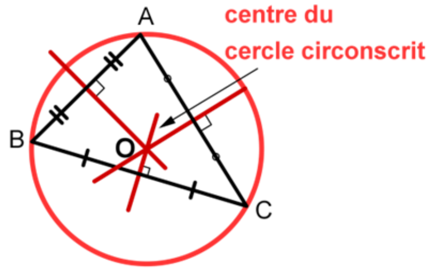
1) Hypoténuse

Définition :

> **Dans un triangle rectangle le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse.**



2) Hauteurs, médianes, médiatrices (rappels)

	Hauteurs	Médianes	Médiatrices
Définition :	Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet 	Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet 	La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu 
Propriétés:	Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : elles ont un point commun appelé l'orthocentre 	Les trois médianes d'un triangle sont concourantes : elles ont un point commun appelé le centre de gravité 	Le point d'intersection des trois médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. 
Remarques importantes	La hauteur peut être une droite ou un segment.(Dans le calcul d'aires on utilise le segment hauteur par exemple)	La médiane peut être une droite ou un segment. Dans ce chapitre la médiane sera le segment	

II) Propriétés

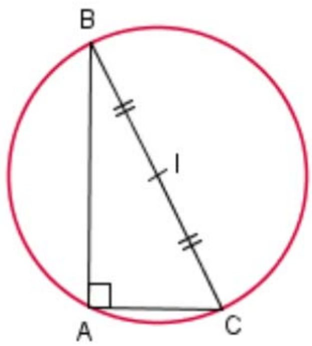
1) Triangle rectangle et cercle circonscrit

• Si un triangle est rectangle alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit. Ce qui revient à dire :

• Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit

Donnée de l'énoncé :
ABC est un triangle rectangle

Conclusion :
[BC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC

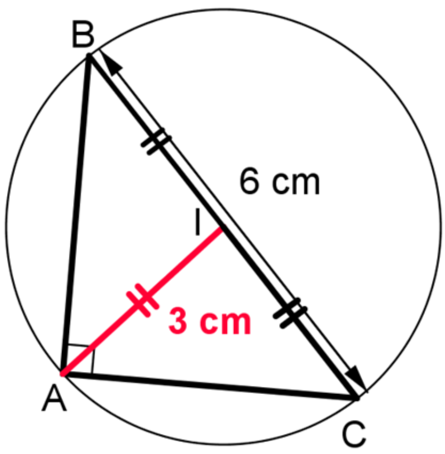


2) triangle rectangle et médiane

a) Propriété

Si un triangle est rectangle, alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse.

Dans ce cas la médiane est un rayon du cercle circonscrit.



b)Conséquence :

Si le triangle ABC est rectangle en A alors:

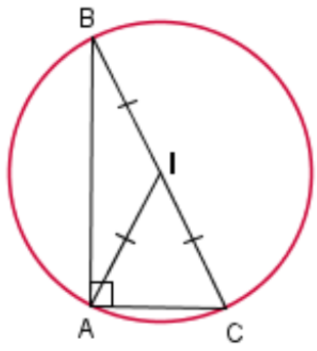
- **Le milieu I de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit**
- **IA = IB = IC =** $\frac{BC}{2}$

Donnée de l'énoncé :

ABC est triangle rectangle

Conclusion :

IA = IB = IC = $\frac{BC}{2}$



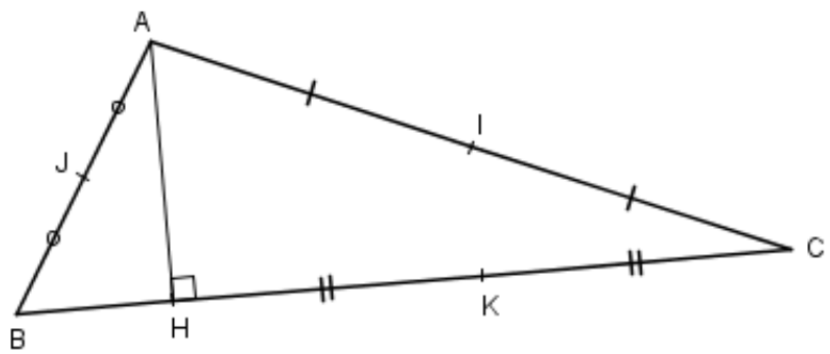
4) Exercices d'application

Exercice 1 :

Le segment [AH] est la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

Le point I est le milieu du segment [AC] , Le point J est le milieu du segment [AB] et Le point k est le milieu du segment [HC].

Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC. Justifier



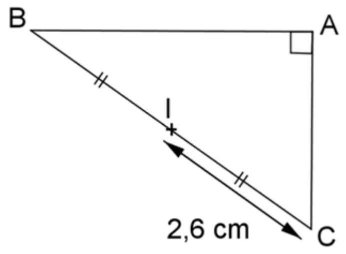
- **Nous savons que** [AH] est la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

Or la hauteur est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé. (AH) est donc perpendiculaire à (BC).Donc **le triangle AHC est rectangle en H**

• **Nous appliquons la propriété** qui est : Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit

• **Conclusion** : Le segment [AC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AHC. Le **centre de ce cercle est le point I milieu du côté [AC]**

Exercice 2 : ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu de [BC]. Déterminer la longueur du segment [AI]



• **Nous savons que** le triangle ABC est rectangle en A

• **Nous appliquons la propriété** qui est : Si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse

• **Conclusion** :

Comme [AI] est la médiane issue du point A alors : **AI = IC =** $\frac{BC}{2}$ **= 2,6 cm**

III) Propriétés réciproques

1) Triangle inscrit et triangle rectangle

Si un triangle inscrit dans un cercle a pour côté un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle

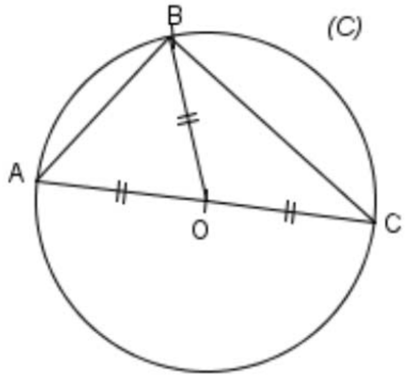
Exemple :

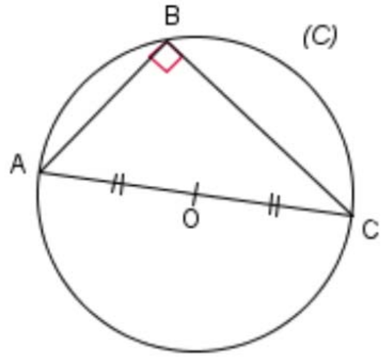
Donnée de l'énoncé :

On sait que ABC est un triangle inscrit dans le cercle de diamètre [BC]

Conclusion :

Le triangle ABC est rectangle en B



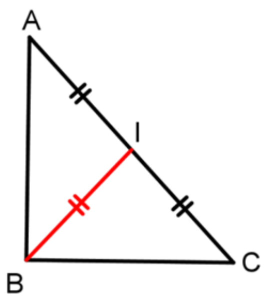


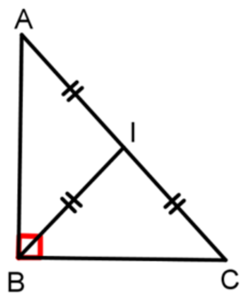
Donnée de l'énoncé :
ABC est un inscrit dans le cercle de diamètre [AC]

Conclusion :
le triangle ABC est rectangle en B

2) Médiane d'un triangle

Dans un triangle, si la médiane issue d'un sommet mesure la moitié du côté opposé à ce sommet alors ce triangle est rectangle.





Donnée de l'énoncé :

La médiane [BI] issue de B a pour longueur la moitié de celle de son côté opposé [AC]

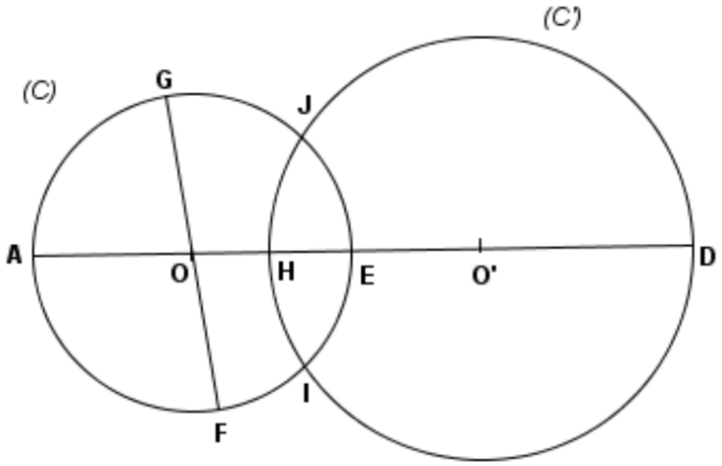
Conclusion :

Le triangle ABC est rectangle en B

3) Exercices d'application

Exercices 1 : Nommer tous les triangles rectangles possibles à l'aide des points marqués sur la figure

(les points A , O, H , E , O' et D sont alignés ainsi que G , O et F)



Je sais que le côté [GF] du triangle AGF est le diamètre du cercle C.

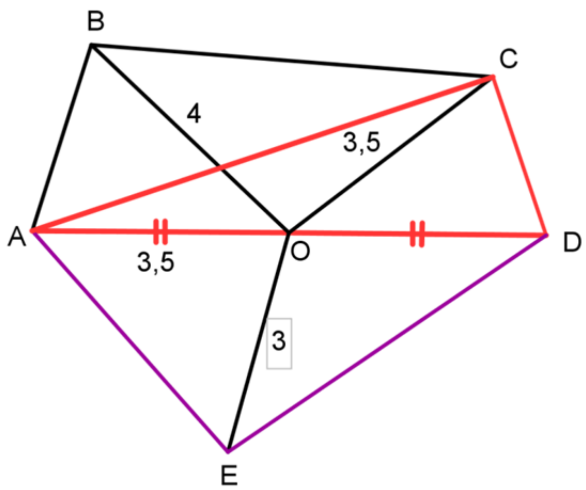
J'applique la propriété réciproque qui est : Si un triangle inscrit dans un cercle a pour côté un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle

Conclusion : Le triangle AGF est rectangle en A

En utilisant la même méthode on peut dire que les triangles :

GFE ; AEG ; AEF ; HDJ ; HDI sont des triangles rectangles

Exercices 2 : Parmi les triangles ADC et AED lequel ou lesquels sont rectangles ? Justifier votre réponse



• **Cas du triangle ACD :**

• **Je sais que** dans le triangle ACD , OC = $\frac{AD}{2}$ et [OC] est la médiane issue du point C

• **J'applique la propriété réciproque** qui est : Dans un triangle, si la médiane issue d'un sommet mesure la moitié du côté opposé alors ce triangle est rectangle.

• **Conclusion** : **Le triangle ACD est donc rectangle en C.**

Ce qui n'est pas le cas du triangle AED :

[OE] est la médiane issue du point E

OE = 3 cm AD = 7 cm.

Comme OE ≠ $\frac{AD}{2}$, le triangle AED n'est pas rectangle.