

# Continuité d'une fonction, Théorème des valeurs intermédiaires

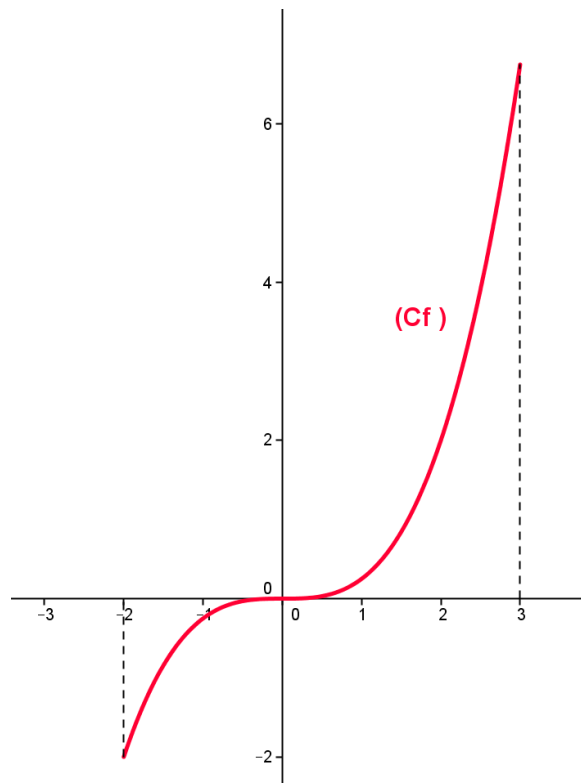
## I) Notion de continuité

### 1) Définition

On dit qu'une fonction est **continue** sur un intervalle  $I$  lorsque le tracé de sa courbe représentative sur l'intervalle  $I$  se fait sans lever le crayon.

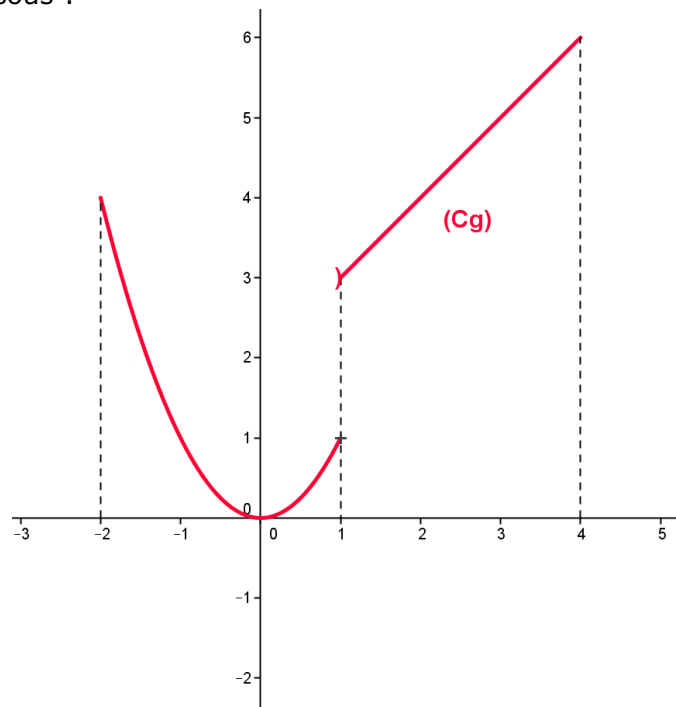
#### Exemples :

$f$  est une fonction définie sur l'intervalle  $I = [ - 2 ; 3 ]$  dont la courbe  $(C_f)$  est représentée ci-dessous :



Cette courbe se trace sans lever le crayon sur  $I$  donc la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .

$g$  est une fonction définie sur l'intervalle  $I = [-2 ; 4]$  dont la courbe ( $C_g$ ) est représentée ci-dessous :



Cette courbe ne peut pas être tracée sans lever le crayon au point d'abscisse 1 donc la fonction  $g$  n'est pas continue sur  $I$ . (par contre elle est continue sur les intervalles  $[-2 ; 1]$  et  $]1 ; 4]$ )

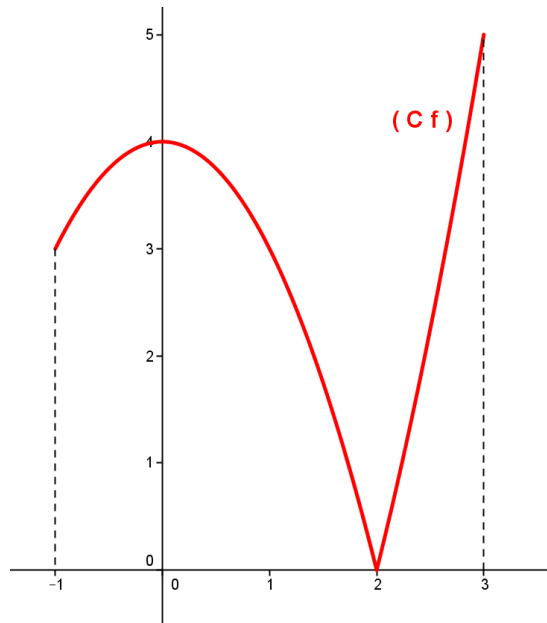
### Remarques sur la continuité:

- Si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , elle est continue en chaque point de cet intervalle.
- Dire qu'une fonction  $f$  est continue en  $a$  signifie que  $f$  a une limite finie en  $a$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

## 2) Lien entre dérivabilité et continuité

**Si une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ , alors elle est continue sur cet intervalle.**

**Attention la réciproque est fautive** comme l'illustre l'exemple ci-dessous où la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[-1 ; 3]$  (en effet on peut tracer sa courbe sans lever le crayon) mais non dérivable au point d'abscisse 2 (la courbe n'admet pas de tangente en ce point).



## II) Continuité des fonctions usuelles

### 1) Propriété (admise)

- Les fonctions polynômes, rationnelles, valeur absolue, racine carrée ainsi que les fonctions trigonométriques sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
- La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

#### **Exemples :**

**1.** La fonction  $f$  définie pour tout  $x$  réel ( $x \neq \frac{5}{3}$ ) par  $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{3x-5}$  est continue sur les intervalles  $] -\infty ; \frac{5}{3} [$  et  $] \frac{5}{3} ; +\infty [$  où elle est définie.

(en effet c'est le quotient de deux polynômes continus sur  $\mathbb{R}$  et  $3x - 5$  est non nul sur ces intervalles).

**2.** La fonction  $g$  définie sur  $I = ] -\infty ; 6 [$  par  $g(x) = \sqrt{6-x}$  est continue sur  $I$  comme racine carrée d'une fonction continue et positive sur  $I$ .

#### **Remarque :**

Par convention, une flèche inclinée dans un tableau de variations d'une fonction indique que celle-ci est continue et strictement croissante (ou décroissante) sur l'intervalle considéré.

### Exemple :

Dans le tableau de variation ci-dessous la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $] -\infty ; 3 ]$  et continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[ 3 ; 7 ]$

$x$	$-\infty$	$3$	$7$
$f(x)$	$2$	$-5$	$4$

## III) Théorème des valeurs intermédiaires

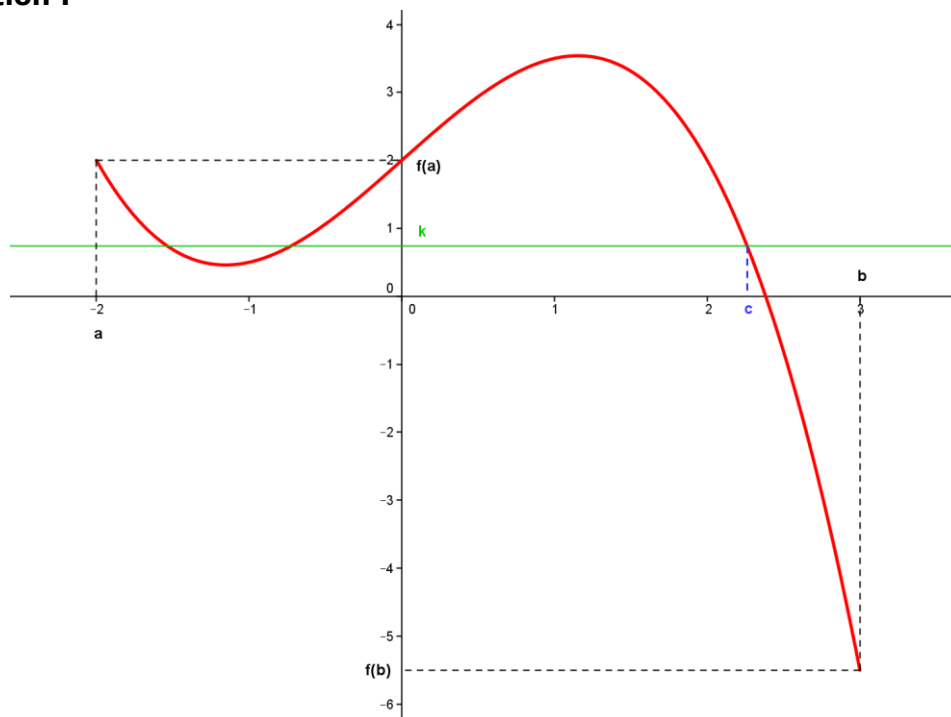
### 1) Théorème 1 (admis)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un réel  $c$  de l'intervalle  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

Autrement dit l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution appartenant à l'intervalle  $[a ; b]$ .

### Illustration :



**Remarque :** Comme le montre la figure ci-dessus le nombre  $c$  n'est pas nécessairement unique (ici il y aurait trois valeurs).

## 2) Théorème 2 : Cas d'une fonction strictement monotone

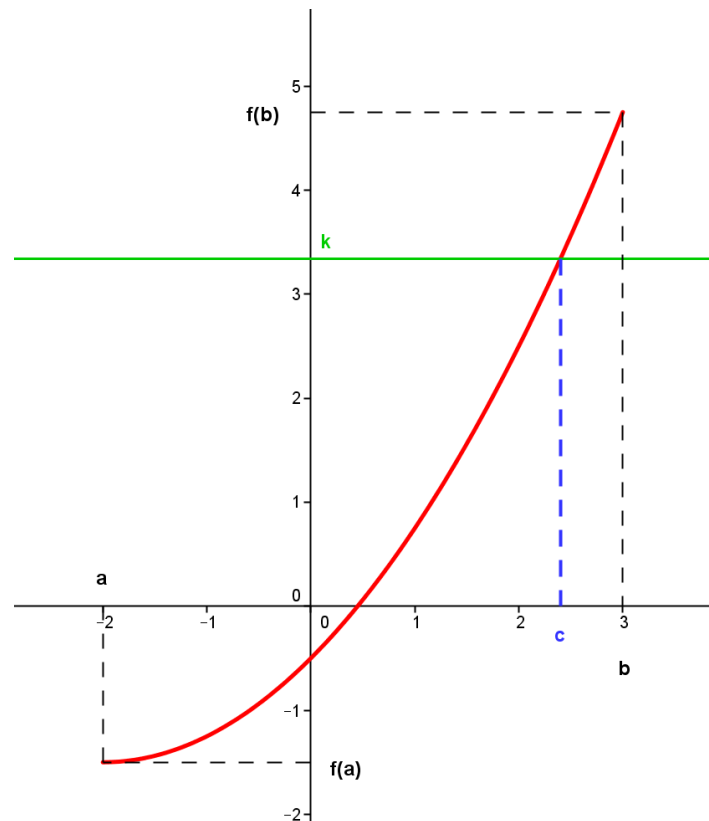
Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle  $[a ; b]$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un unique réel  $c$  tel que  $f(c) = k$ .

Autrement dit l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution appartenant à l'intervalle  $[a ; b]$ .

### Démonstration :

La fonction  $f$  étant continue sur l'intervalle  $[a ; b]$ , le théorème 1 nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel  $c$  tel que  $f(c) = k$  pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . La fonction  $f$  étant strictement monotone sur l'intervalle  $[a ; b]$  on a pour tout  $x \in [a ; b]$ , tel que  $x \neq c$ ,  $f(x) \neq f(c)$ . On peut donc en conclure que le réel  $c$  est unique.

### Illustration :



### Remarque :

Pour démontrer que l'équation  $f(x) = k$  a une unique solution sur l'intervalle  $[a ; b]$ , il suffit de démontrer que  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a ; b]$  et que  $k$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

**Exemple1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}$$

1) Etudiez les variations de  $f$  sur  $[-1,5 ; -1[$

2) Déduisez en que l'équation  $f(x) = 10$  a une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1,5 ; -1[$

**Réponse:**

1) Tout d'abord calculons la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^3 \text{ donc } u'(x) = 3x^2 \text{ et } v(x) = x + 1 \text{ donc } v'(x) = 1$$

Donc sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$ ,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

Or,  $x^2 \geq 0$  et  $(x+1)^2 > 0$  car se sont des carrés, le signe de  $f'$  dépend de celui de  $2x+3$

Et  $2x+3 = 0$  pour  $x = -\frac{3}{2}$

On obtient donc le tableau de variation suivant:

$x$	$-1,5$	$-1$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$

2) La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[-1,5 ; -1[$

De plus  $10 \in [\frac{27}{4}, +\infty[$  donc il existe un unique réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1,5 ; -1[$  tel que  $f(\alpha) = 10$

**Exemple 2 :**

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$4$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$-5$	$+\infty$

Expliquer pourquoi l'équation  $f(x) + 3 = 0$  admet exactement trois solutions distinctes sur  $\mathbb{R}$ .

### Réponse:

$f(x) + 3 = 0$  équivaut à résoudre  $f(x) = -3$

Pour appliquer le théorème 2 nous devons travailler dans des intervalles où la fonction est strictement monotone.

Nous allons donc appliquer notre théorème sur l'intervalle  $] -\infty ; -1]$  puis sur l'intervalle  $[-1 ; 4]$  et enfin sur l'intervalle  $[4 ; +\infty[$

#### • Sur l'intervalle $] -\infty ; -1]$ :

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $] -\infty ; -1]$ .

De plus  $-3 \in ] -\infty ; 2]$  donc il existe un unique réel  $x_1$  dans l'intervalle  $] -\infty ; -1]$  tel que  $f(x_1) = -3$

#### • Sur l'intervalle $[-1 ; 4]$ :

La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[-1 ; 4]$ .

De plus  $-3 \in [-5 ; 2]$  donc il existe un unique réel  $x_2$  dans l'intervalle  $[-1 ; 4]$  tel que  $f(x_2) = -3$

#### • Sur l'intervalle $[4 ; +\infty [$

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[4 ; +\infty[$

De plus  $-3 \in [-5 ; +\infty[$  donc il existe un unique réel  $x_3$  dans l'intervalle  $[4 ; +\infty[$  tel que  $f(x_3) = -3$

• **Conclusion** : L'équation  $f(x) + 3 = 0$  admet exactement trois solutions distinctes sur  $\mathbb{R}$ .

### Cas particulier :

**Pour démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution sur l'intervalle  $[a ; b]$ , il suffit de démontrer que  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a ; b]$  et que  $f(a) \times f(b) < 0$ .**

En effet  $f(a) \times f(b) < 0$  implique que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires et non nuls.

Donc  $0 \in [f(a) ; f(b)]$  ou  $0 \in [f(b) ; f(a)]$

### Exemple :

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I = [-4 ; 5]$  et vérifie  $f(-4) = -3$  et  $f(5) = 2$

L'équation  $f(x) = 0$  admet-elle une solution dans  $I$  ?

### Réponse:

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I = [-4 ; 5]$ . De plus  $f(-4) < 0$  et  $f(5) > 0$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $I$ .

## 3) Théorème 3 : Cas généralisé d'une fonction monotone

**Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  de la forme  $] -\infty ; a [$  ou  $] a ; +\infty [$  ou  $] -\infty ; +\infty [$  et admettant les limites  $\ell$  et  $m$  réelles ou infinies aux bornes de cet intervalle. Alors pour tout réel  $k$  compris entre  $\ell$  et  $m$  il existe un unique réel  $c \in I$  tel que  $f(c) = k$**

### Exemples :

1) La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  donc pour tout réel  $k$  l'équation  $f(x) = k$  admet une solution unique.

2) La fonction définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{x-1}$  est continue et strictement croissante sur  $[1 ; +\infty[$ , de plus  $g(1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  donc pour tout réel  $k \geq 0$  l'équation  $g(x) = k$  admet une solution unique.

## IV) Exemple d'utilisation

### • Montrons que l'équation $\cos(x) = x$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$

Considérons pour cela la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x) - x$ .

On a  $f$  continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  sa dérivée  $f'(x) = -\sin(x) - 1$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$  donc on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**Tout ceci nous permet de conclure que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique sur  $\mathbb{R}$ .**

On peut de plus encadrer cette solution plus précisément que  $f(0) = 1$  et que  $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$  ce qui permet de conclure que **cette solution se trouve dans l'intervalle  $[0 ; \frac{\pi}{2}]$**

L'utilisation d'un tableau de valeurs sur calculatrice ou d'un tableur permettrait d'encadrer cette solution avec la précision voulue : Notons  $\alpha$  cette solution.

### • Cherchons maintenant à l'aide d'un tableur un encadrement de la solution $\alpha$ à $10^{-3}$ près

x	cosx-x	
0	1	
0,1	0,89500417	
0,2	0,78006658	
0,3	0,65533649	
0,4	0,52106099	
0,5	0,37758256	
0,6	0,22533561	
0,7	0,06484219	> 0
0,8	-0,10329329	< 0
0,9	-0,27839003	
1	-0,45969769	
1,1	-0,64640388	
1,2	-0,83764225	
1,3	-1,03250117	
1,4	-1,23003286	
1,5	-1,4292628	

On sait que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , donc on prend différentes valeurs de  $x$  comprises entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  avec un pas de 0,1

**Donc  $0,7 < \alpha < 0,8$**



Changeons encore le pas de  $x$  afin d'avoir une valeur approchée de  $\alpha$  plus précise.

On sait que  $0,7 < \alpha < 0,8$  donc on prend différentes valeurs de  $x$  comprises entre 0,7 et 0,8 avec un pas de 0,01

	A	B	C
1	x	cosx-x	
2	0,7	0,06484219	
3	0,71	0,04836188	
4	0,72	0,03180573	
5	<b>0,73</b>	<b>0,0151744</b>	<b>&gt; 0</b>
6	<b>0,74</b>	<b>-0,00153144</b>	<b>&lt; 0</b>
7	0,75	-0,01831113	
8	0,76	-0,03516399	
9	0,77	-0,05208933	
10	0,78	-0,06908646	
11	0,79	-0,08615468	
12	0,8	-0,10329329	
13	0,81	-0,12050157	
14	0,82	-0,13777879	
15	0,83	-0,15512424	
16	0,84	-0,17253717	
17	0,85	-0,19001685	

**Donc  $0,73 < \alpha < 0,74$**

Changeons encore le pas de  $x$  afin d'avoir une valeur approchée de  $\alpha$  plus précise.

On sait que  $0,73 < \alpha < 0,74$  donc on prend différentes valeurs de  $x$  comprises entre 0,73 et 0,74 avec un pas de 0,001

x	cosx-x	
0,73	0,0151744	
0,731	0,01350716	
0,732	0,01183917	
0,733	0,01017044	
0,734	0,00850097	
0,735	0,00683075	
0,736	0,0051598	
0,737	0,0034881	
0,738	0,00181566	
<b>0,739</b>	<b>0,00014248</b>	<b>&gt; 0</b>
<b>0,74</b>	<b>-0,00153144</b>	<b>&lt; 0</b>

**Donc  $0,739 < \alpha < 0,740$**

Changeons encore le pas de  $x$  afin d'avoir une valeur approchée de  $\alpha$  plus précise.

On sait que  $0,739 < \alpha < 0,740$  donc on prend différentes valeurs de  $x$  comprises entre  $0,739$  et  $0,740$  avec un pas de  $0,0001$

A	B	C
$x$	$\cos x - x$	
0,739	0,000142477	> 0
0,7391	-2,48813E-05	< 0
0,7392	-0,000192247	
0,7393	-0,000359621	
0,7394	-0,000527001	
0,7395	-0,00069439	
0,7396	-0,000861785	
0,7397	-0,001029188	
0,7398	-0,001196598	
0,7399	-0,001364016	
0,74	-0,001531441	
0,7401	-0,001698874	
0,7402	-0,001866314	
0,7403	-0,002033761	
0,7404	-0,002201216	
0,7405	-0,002368678	
0,7406		

**Donc  $0,739 < \alpha < 0,7391$**

**Conclusion : A  $10^{-3}$  près,  $\alpha \approx 0,739$**