

Dérivées : Rappels et compléments

I) Rappels

1) Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a , soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que la fonction f est dérivable au point d'abscisse a si et seulement si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers zéro. On note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a . On le note $f'(a)$.

Exemples :

1°) Soit $f(x) = x^2 - 3$, calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 3

Calcul du taux de variation : Pour $h \neq 0$: $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$f(3) = 3^2 - 3 = 6 \text{ et } f(3+h) = (3+h)^2 - 3 = 9 + 6h + h^2 - 3 = h^2 + 6h + 6$$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{h^2+6h+6-6}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 3 et $f'(3)=6$

2°) Soit $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ Calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Calcul du taux de variation $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$f(0+h) = \frac{4h}{h+2} \quad f(0) = 0$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{4h}{h+2}}{h} = \frac{4}{h+2}$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4}{h+2} \right) = 2$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 0 et $f'(0)=2$

2) Tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction dérivable en a , (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse a .

La tangente à la courbe (C) au point $A(a ; f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

3) Equation de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en a , (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse a .

La tangente à la courbe (C) au point A a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque : La tangente à la courbe (C) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe (C) au voisinage du point A .

Démonstration :

D'après la définition la tangente T à (C) au point d'abscisse a a une équation de la forme :
 $y = f'(a)x + b$

Comme $A(a ; f(a))$ appartient à T on a : $f(a) = f'(a)a + b$ d'où $b = f(a) - f'(a)a$

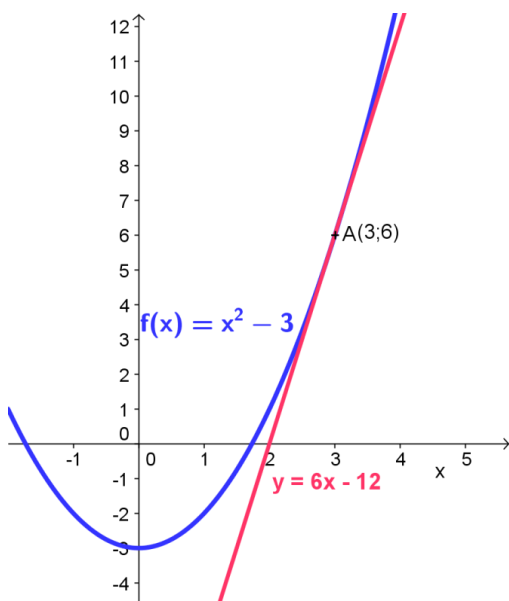
Donc on obtient $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ et finalement $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemples :

Exemple 1 : Donner une équation de la tangente à la courbe (C) de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

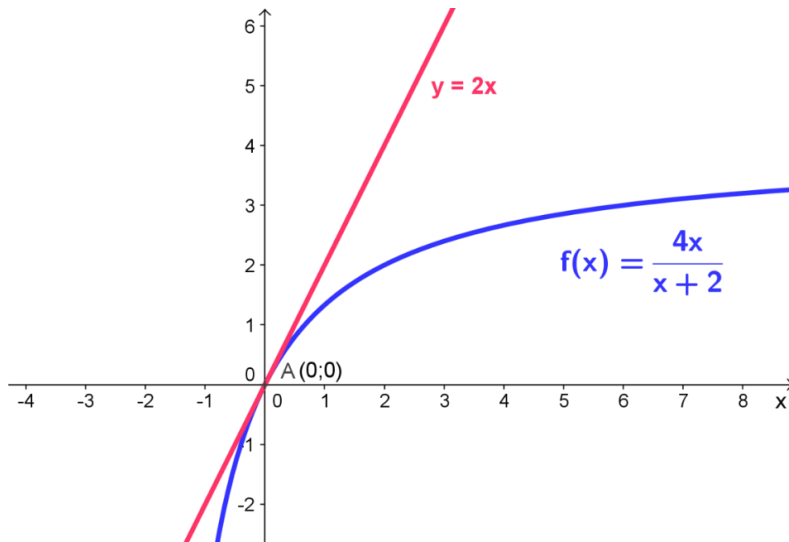
On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :

$$y = 6(x - 3) + 6 \text{ soit } y = 6x - 12$$



Exemple2 : Donner une équation de la tangente à la courbe (\mathcal{C}) de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est : $y = 2x$



3) Fonction dérivée.

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in D$

Si f est dérivable sur D , on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \rightarrow f'(a)$

Exemple:

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors pour tout $a \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{-(x-a)}{xa}}{x-a} = -\frac{1}{xa} \text{ pour } x \neq 0$$

Donc pour tout $a \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{a^2}$$

f est dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : a \mapsto -\frac{1}{a^2}$

4) Dérivées des fonctions usuelles.

<i>Fonction f :</i>	<i>Dérivable sur :</i>	<i>Fonction dérivée f' :</i>
$f(x) = k (k \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin(x)$

5) Dérivées et opérations.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

<i>Fonction</i>	<i>Dérivable sur</i>	<i>Dérivée</i>
$u + v$	D	$u' + v'$
λu	D	$\lambda u'$
uv	D	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

- **Exemple 1** : Calculer la dérivée de la fonction f

$$f(x) = \frac{x^2+5x+2}{2x-3} \quad \text{Pour } x \neq \frac{3}{2} \quad f(x) = \frac{u}{v}$$

$$u(x) = x^2 + 5x + 2 \text{ donc } u'(x) = 2x + 5$$

$$v(x) = 2x - 3 \text{ donc } v'(x) = 2$$

Pour tout $x \neq \frac{3}{2}$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+5)(2x-3) - 2(x^2+5x+2)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2 - 6x + 10x - 15 - 2x^2 - 10x - 4}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 19}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 19}{(2x-3)^2}$$

Donc f' est la fonction définie sur $] -\infty ; \frac{3}{2}[\cup] \frac{3}{2} ; +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 19}{(2x-3)^2}$

- **Exemple 2** : Calculer la dérivée de la fonction g :

$$g(x) = (2x + 5)(6x - 2) \quad \text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} :$$

$$g(x) = u v \quad \text{avec :}$$

$$u(x) = 2x + 5 \text{ donc } u'(x) = 2$$

$$v(x) = 6x - 2 \text{ donc } v'(x) = 6$$

Pour tout x de \mathbb{R} :

$$g'(x) = u'v + uv' = 2(6x - 2) + 6(2x + 5) = 12x - 4 + 12x + 30 = 24x + 26$$

Donc g' est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g'(x) = 24x + 26$

- **Exemple 3** : Calculer la dérivée de la fonction h :

$$h(x) = 4\cos(x) \quad \text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} :$$

$$h(x) = \lambda u \quad \text{avec :}$$

$$u(x) = \cos(x) \text{ donc } u'(x) = -\sin x \text{ et } \lambda = 4$$

Pour tout x de \mathbb{R} :

$$h'(x) = \lambda u' = -4 \sin(x)$$

Donc h' est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h'(x) = -4\sin(x)$

• **Exemple 4** : Calculer la dérivée de la fonction i :

$$i(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$$

$x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} car $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$ donc pour tout x de \mathbb{R} : $x^2 - 2x + 4 \neq 0$

Pour tout x de \mathbb{R} : $i(x) = \frac{1}{u}$

$$u(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ donc } u'(x) = 2x - 2$$

Pour tout x de \mathbb{R} :

$$i'(x) = \frac{-u'}{u^2} = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$$

$$i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$$

Donc i' est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$

II) Compléments :

1) Propriété (admise)

• Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction u^n où n est un entier strictement positif est dérivable sur I et :

$$(u^n)' = n u^{n-1} u'$$

Exemples :

1°) Soit $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$ est dérivable pour tout x réel et on a :

$$u(x) = 3x^2 + 4 \text{ donc } u'(x) = 6x \text{ de là :}$$

$$f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

2°) Soit $g(x) = (3x^3 + 2x^2 - 5)^4$

On a $u(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$ donc $u'(x) = 9x^2 + 4x$ de là :

$$f'(x) = 4(3x^3 + 2x^2 - 5)^3 \times (9x^2 + 4x)$$

2) Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur $u(I)$, alors la fonction g qui à x associe $f(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$g'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$$

En particulier si u est une fonction affine avec $u(x) = ax + b$, alors $g(x) = f(ax + b)$ et on a :

$$g'(x) = a \times f'(ax + b)$$

Exemples :

Exemple 1 : Soit $f(x) = (\cos(x))^2$ On a $u(x) = \cos(x)$ donc $u'(x) = -\sin(x)$ de là
 $f'(x) = 2 \cos(x) \times (-\sin(x))$

Exemple 2 : Soit $f(x) = \cos(4x + 3)$ On a $u(x) = 4x + 3$ de là
 $f'(x) = 4 \times (-\sin(4x + 3))$

Exemple 3 : Soit $g(x) = f(x^2 + 2x)$ avec f une fonction dérivable sur \mathbb{R}

On a $u(x) = x^2 + 2x$ donc $u'(x) = 2x + 2$

Alors $g'(x) = f'(x^2 + 2x) \times (2x + 2)$