Etude d'une limite de suite

I) Limites de suite usuelle

1) Suites de référence de limites finies

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

et plus généralement on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ **avec p** $\in \mathbb{N}^*$

2) Suites de référence de limites infinies

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

et plus généralement on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty$ **avec p** $\in \mathbb{N}^*$

II) Opérations et limites

1) Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite :	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite :	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n + v_n)$ a pour limite :	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

2) Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite :	ℓ	$\ell\ (\neq 0)$	$\pm\infty$	0
Si (v_n) a pour limite :	ℓ'	$+\infty$	$\pm\infty$	∞
Alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite :	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$\pm\infty$ **On applique la règle des signes**	**Forme indéterminée**

3) Limite d'un quotient

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

Si (u_n) a pour limite :	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Si (v_n) a pour limite :	$\ell'\ (\neq 0)$	$+\infty$	$\ell'\ (\neq 0)$	$\pm\infty$
Alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite :	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ **On applique la règle des signes**	**Forme indéterminée**

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Si (u_n) a pour limite :	$\ell(\neq 0)$ **ou** ∞	$\ell(\neq 0)$ **ou** ∞	0
Si (v_n) a pour limite :	$0+$	$0-$	0
Alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite :	$\pm\infty$ **On applique la règle des signes**		**Forme indéterminée**

4) Exemples

Exemple 1 : Déterminer la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n^3} + 5$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} + 5 = 0 + 5 = \mathbf{5}$

Exemple 2 : Déterminer la limite de la suite $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \sqrt{n} = 0 + \infty = +\infty$

Exemple 3 : Déterminer la limite de la suite $u_n = n - \sqrt{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ on obtient une forme indéterminée : « $+\infty - \infty$»

Pour ne plus avoir une forme indéterminée, en général, une factorisation suffit, en prenant comme facteur le terme dominant :

$u_n = n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$

$+\infty \times 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Exemple 4 : Déterminer la limite de la suite $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + 1 = +\infty$ et $n^2 + n = +\infty$ on obtient une forme indéterminée : « $\frac{\infty}{\infty}$»

Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme du plus haut degré, qui est n^2 dans les deux cas.

Pour $n \geq 1$:

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} = \frac{\cancel{n^2}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

$2 \times 1 = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} = \mathbf{2}$

Exemple 5 : Déterminer la limite de la suite $u_n = \dfrac{7n+3}{n^2}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 7n+3 = +\infty$ et $n^2 = +\infty$ on obtient une forme indéterminée : « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme du plus haut degré, qui est n pour le numérateur et n^2 pour le dénominateur.

Pour $n \geq 1$:

$$\frac{7n+3}{n^2} = \frac{n(7+\frac{3}{n})}{n^2 \times 1} = \frac{7+\frac{3}{n}}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 + \frac{3}{n} = 7$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\dfrac{7}{+\infty}$ =0 donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7+\frac{3}{n}}{n} = 0$

Donc : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+3}{n^2} = 0}$

III) Limite et comparaison

1) Théorème 1

(u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

- **$u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$**
- **$u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$**

Démonstration :

- Montrons tout d'abord que si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Pour cela il faut prouver que tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain indice.

Soit A un nombre quelconque.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors, par définition, l'intervalle] A ; $+\infty$ [contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Notons p ce rang.

Donc pour tout $n \geq p$ $\quad u_n$ > A

De plus, pour tout $\boldsymbol{n \geq n_0}$ $\quad u_n \leq v_n$ ce qui revient à écrire $v_n \geq u_n$

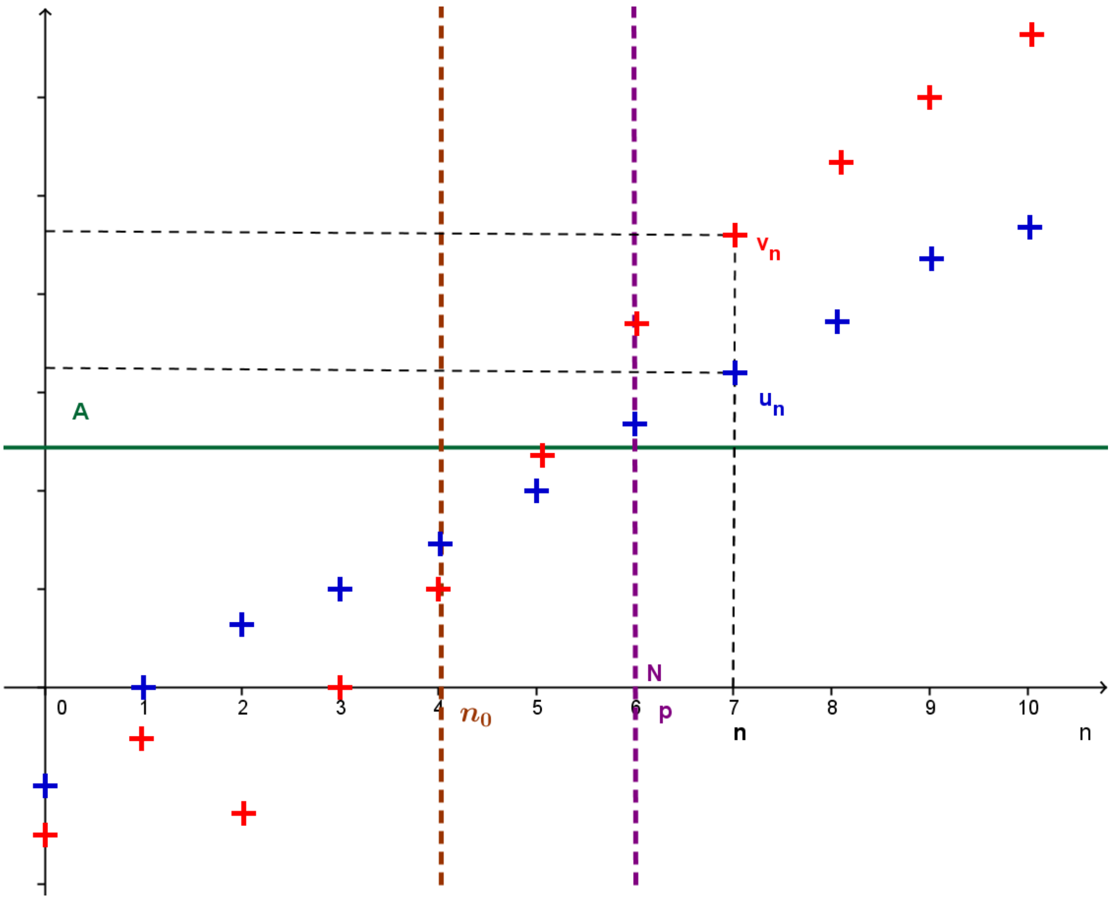
En notant N, le plus grand des deux entiers n_0 et p on peut donc écrire que pour tout $n \geq N$, $\quad v_n \geq u_n > \text{A}$

On en déduit que : **pour tout $n \geq N$, v_n > A**

Il existe donc bien un rang, à savoir l'entier N, à partir duquel tous les termes de la suite (v_n) sont dans un intervalle quelconque de la forme] A ; +∞ [

Ce qui prouve que $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Illustration graphique :



• Maintenant montrons que si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Pour cela il faut prouver que tout intervalle de la forme $]-\infty$; A[contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.

Soit A un nombre quelconque.

Comme $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors par définition, l'intervalle $]-\infty$; A[contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang. Notons p ce rang.

Donc pour tout $n \geq p$ $\quad v_n$ < A

De plus, pour tout $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$ $\quad u_n \leq v_n$

En notant N, le plus grand des deux entiers n_0 et p on peut donc écrire que pour tout

$n \geq N$, $u_n \leq v_n$ < A

On en déduit que : **pour tout $n \geq N$, u_n < A**

Il existe donc bien un rang, à savoir l'entier N, à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans un intervalle quelconque de la forme $]-\infty\ ;\ A[$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boldsymbol{-\infty}$

2) Exemples

Exemple 1 : Déterminer la limite de la suite $(u_n\ )$ définie par: $u_n\ = \dfrac{n}{\sqrt{n-5}}$ pour $n\ \geq 6$

Pour tout entier $n\ \geq 6$, $\qquad \sqrt{n-5} < \sqrt{n}$

et donc pour tout entier $n\ \geq 6\ \ $: $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{n-5}}\ > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

D'où pour tout entier $n\ \geq 6$: $\qquad \dfrac{n}{\sqrt{n-5}}\ > \dfrac{n}{\sqrt{n}}$ soit : $\dfrac{n}{\sqrt{n-5}}\ > \sqrt{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, alors le théorème de comparaison permet de conclure que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{\dfrac{n}{\sqrt{n-5}}} = +\,\boldsymbol{\infty}$

Exemple 2 : Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par: $u_n\ = \dfrac{-n}{\sqrt{n-3}}$ pour $n\ \geq 4$

Pour tout entier $n\ \geq 4$, $\qquad \sqrt{n-3} < \sqrt{n}$

et donc pour tout entier $n\ \geq 4\ \ $: $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{n-3}}\ > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

D'où pour tout entier $n\ \geq 4$: $\qquad \dfrac{n}{\sqrt{n-3}}\ > \dfrac{n}{\sqrt{n}}$

Nous obtenons donc : pour tout entier $n\ \geq 4$: $\qquad \dfrac{-n}{\sqrt{n-3}}\ < \dfrac{-n}{\sqrt{n}}$

soit : $\dfrac{-n}{\sqrt{n-3}}\ < -\sqrt{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$, alors le théorème de comparaison permet de conclure:

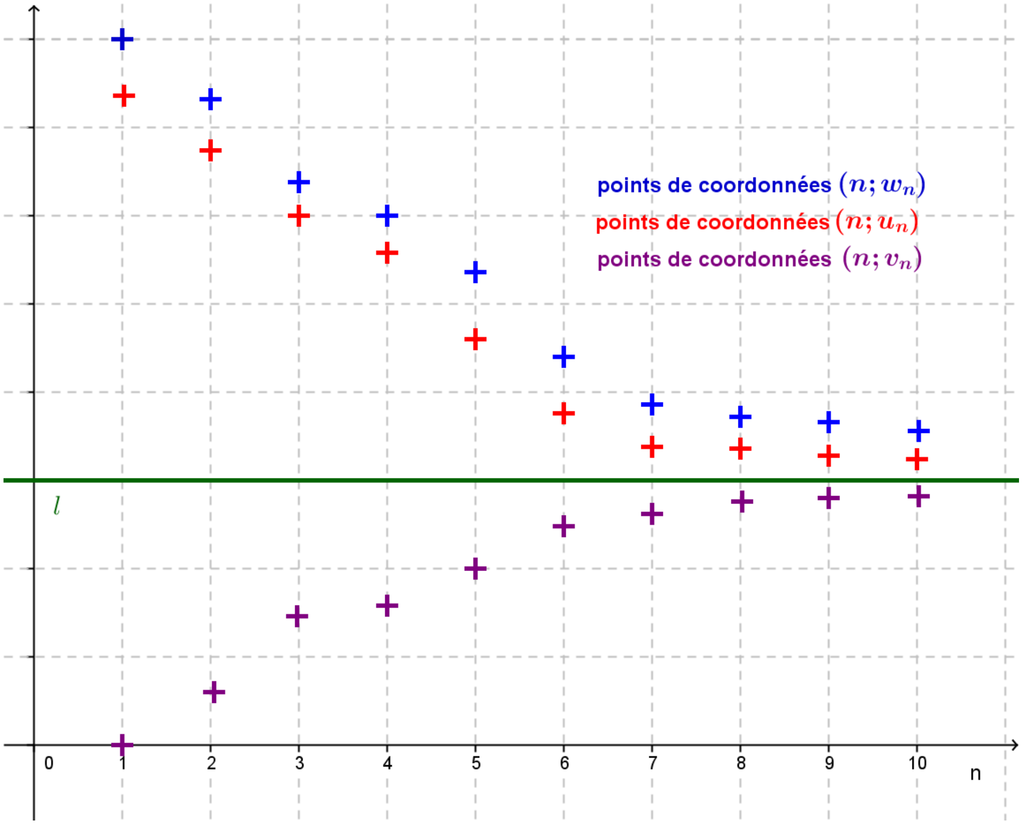
$\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{\dfrac{-n}{\sqrt{n-3}}} = -\,\boldsymbol{\infty}$

3) Théorème d'encadrement (dit : « théorème des gendarmes »)

(u_n), (w_n) et (v_n) sont trois suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

Ce théorème est admis.

Illustration graphique :



Exemple: Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par: $u_n = \dfrac{2+5(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$:

Pour tout $n \geq 1$: $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

et donc pour tout entier $n \geq 1$: $\quad -5 \leq 5(-1)^n \leq 5$

D'où pour tout entier $n \geq 1$: $\quad 2+(-5) \leq 2+5(-1)^n \leq 2+5$

Nous obtenons donc: pour tout entier $n \geq 1 \quad \dfrac{-3}{n} \leq \dfrac{2+5(-1)^n}{n} \leq \dfrac{7}{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n} = 0$ donc le théorème d'encadrement permet de conclure :

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+5(-1)^n}{n} = 0} \qquad \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

La suite (u_n) étant encadrée par deux suites qui convergent vers 0, converge aussi vers 0.