

# Limites de fonctions

## I) Limite et opérations

### 1) Limite d'une somme

Si $f$ a pour limite:	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $g$ a pour limite:	$\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f(x) + g(x)$ a pour limite:	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

### 2) Limite d'un produit

Si $f$ a pour limite:	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\pm \infty$	0
Si $g$ a pour limite:	$\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
Alors $f(x) \times g(x)$ a pour limite:	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$ On applique la règle des signes	Forme indéterminée

### 3) Limite d'un quotient

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$

Si $f$ a pour limite:	$\ell$	$\ell$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
Si $g$ a pour limite:	$\ell' (\neq 0)$	$+\infty$	$\ell' (\neq 0)$	$\pm \infty$
Alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ a pour limite:	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$ On applique la règle des signes	Forme indéterminée

**b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$**

<b>Si <math>f</math> a pour limite:</b>	$\ell (\neq 0) \text{ ou } \infty$	<b>0</b>
<b>Si <math>g</math> a pour limite:</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>Alors <math>\frac{f(x)}{g(x)}</math> a pour limite:</b>	$\pm \infty$ <b>On applique la règle des signes</b>	<b>Forme indéterminée</b>

**4) Exemples**

**Exemple 1:** Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + 5. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} + 5 = 0 + 5 = 5 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

**Exemple 2 :** Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \sqrt{x} = 0 + \infty = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**Exemple 3 :** Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - \sqrt{x}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  on obtient une forme indéterminée : «  $+\infty - \infty$  »

Pour ne plus avoir une forme indéterminée, en général, une factorisation suffit, en prenant comme facteur le terme dominant :

$$\text{Pour } x \neq 0 : f(x) = x - \sqrt{x} = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ par conséquent : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \right\} \begin{array}{l} +\infty \times 1 = +\infty \text{ donc} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \end{array}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**Exemple 4 :** Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$  on obtient une forme indéterminée :

$$\ll \frac{\infty}{\infty} \gg$$

Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme du plus haut degré, qui est  $x^2$  dans les deux cas.

Pour  $x$  différent de 0 et de  $-1$  :

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} = \frac{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x})} = \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{1} = 2 \text{ donc} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 2 \end{array} \right\}$$

## **II) Limite et comparaison**

On considère  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  ouvert et  $a$  un réel tel que  $a$  appartient à  $I$  ou est une borne de  $I$ .

### **1) Théorème 1**

**Si pour tout nombre réel  $x$  de  $I$ ,**

- **$f(x) \geq g(x)$  et si et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$**
- **$f(x) \geq g(x)$  et si et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$**

#### **Démonstration :**

- Montrons tout d'abord que si  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Pour cela il faut prouver que tout intervalle ouvert de la forme  $]A ; +\infty[$  contient  $f(x)$  pour tous les nombres  $x$  suffisamment proche de  $a$ .

Soit  $A$  un nombre quelconque.

Comme  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  alors, par définition, l'intervalle  $]A ; +\infty[$  contient  $g(x)$  pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ .

Donc pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ ,  $g(x) > A$

De plus, pour tout  $x$  de  $I$   $f(x) \geq g(x)$

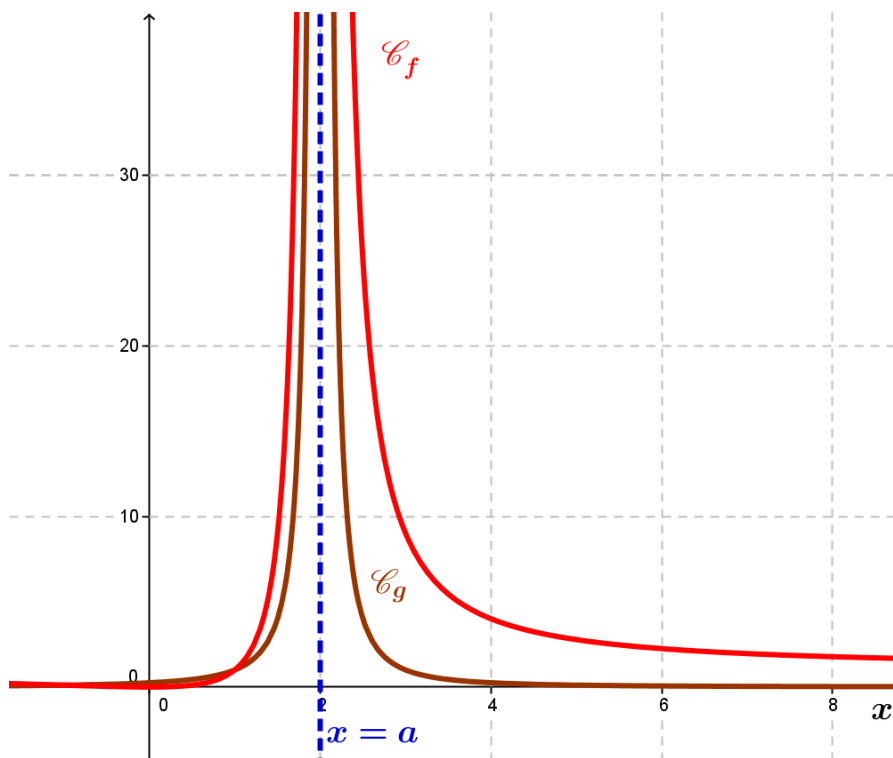
on peut donc écrire que pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ ,

$$f(x) \geq g(x) > A$$

On en déduit que : pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ ,  $f(x) > A$

**Ce qui prouve que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$**

### Illustration graphique :



- Maintenant montrons que si  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ .

Pour cela il faut prouver que tout intervalle de la forme  $]-\infty ; A[$  contient  $g(x)$  pour tous les nombres  $x$  suffisamment proche de  $a$ .

Soit  $A$  un nombre quelconque.

Comme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  alors par définition, l'intervalle  $]-\infty ; A[$  contient  $f(x)$  pour tous les nombres  $x$  suffisamment proche de  $a$ .

Donc pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ ,  $f(x) < A$

De plus, pour tout  $x$  de  $I$   $f(x) \geq g(x)$

on peut donc écrire que pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ ,

$$A > f(x) \geq g(x)$$

On en déduit que : pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ ,  $g(x) < A$

pour tous les nombres  $x$  suffisamment proches de  $a$ , l'intervalle  $]-\infty ; A[$  contient  $g(x)$

**Ce qui prouve que**  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

## 2) Exemples

**Exemple 1** : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + (\cos x)^2$ .

Déterminer sa limite en  $+\infty$ .

Comme  $(\cos x)^2 \geq 0$  alors  $x + (\cos x)^2 \geq x$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  alors d'après le théorème ci-dessus :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + (\cos x)^2 = +\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exemple 2** : Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -x^2 - 3 \sin^2 x$ .

Déterminer sa limite en  $+\infty$ .

Comme  $-x^2 - 3 \sin^2 x \leq -x^2$  (car  $-3 \sin^2 x \leq 0$ )

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$  alors d'après le théorème ci-dessus :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 3 \sin^2 x = -\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

## 2) Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

$f, g$  et  $h$  sont trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  de la forme :  
 $]A ; +\infty[$  ou  $\mathbb{R}$ .  $\ell$  est un nombre réel.

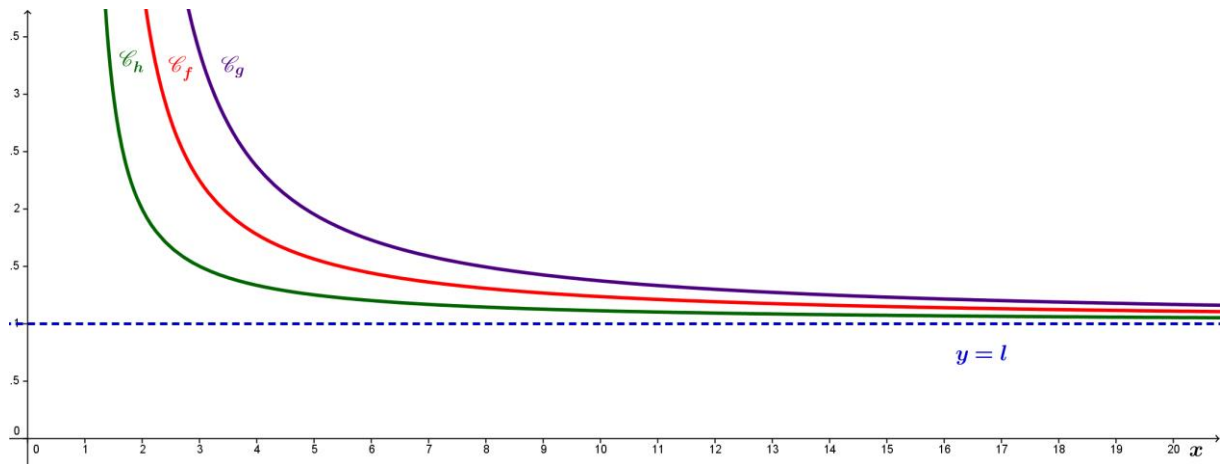
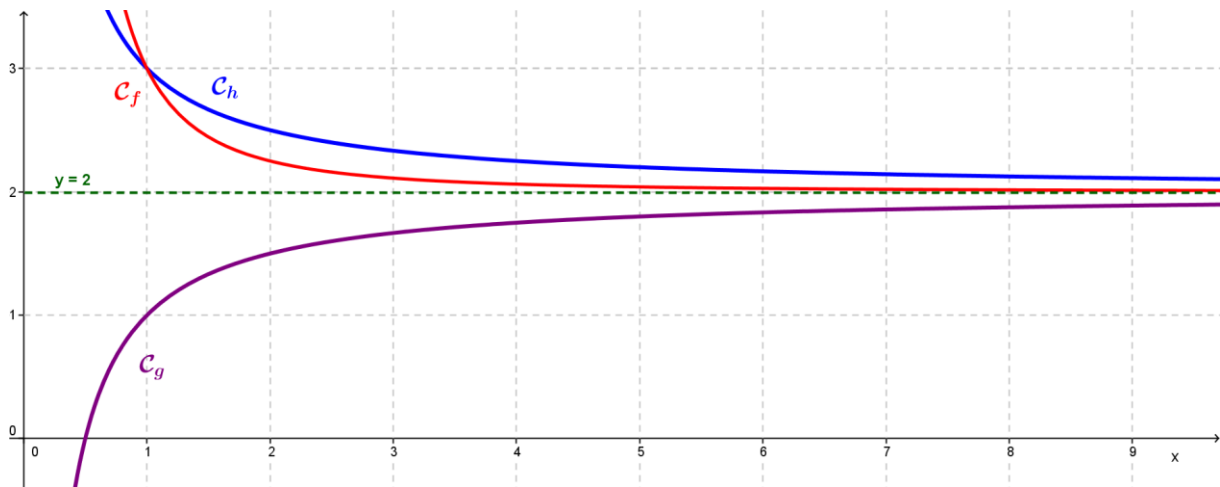
Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si les fonctions  $g$  et  $h$  ont la même limite  $\ell$  en  $+\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

Ce théorème est admis.

**Remarque :**

Cette propriété assure à la fois l'existence de la limite de  $f$  en  $a$  et que celle-ci est égale à  $\ell$

## Illustrations graphiques :



**Exemple:** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

Déterminer sa limite en  $+\infty$ .

Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $-1 \leq \sin x \leq 1$

Donc pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $-\frac{1}{x} \leq \sin x \leq \frac{1}{x}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$  D'après le théorème d'encadrements :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

### III) Limite d'une fonction composée

#### 1) Limite de la composée de deux fonctions

$f$  et  $g$  sont deux fonctions.

$a, b, c$  désignent soient des nombres soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

**Exemple:**  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} = +\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

#### 2) Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

$(v_n)$  est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle  $I$ .

$b$  et  $c$  désignent soient des nombres soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = c$

**Exemples:**

**Exemple 1:**

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = \sqrt{\frac{5n+3}{n+2}}$

On pose  $v_n = \frac{5n+3}{n+2}$  pour avoir ainsi :  $u_n = f(v_n)$  avec  $f(x) = \sqrt{x}$

On peut montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+3}{n+2} = 5$  et comme  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$

On a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{5}$

**Exemple 2: Cas particulier où  $v_n = n$  :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$ , non nul, par :  $u_n = \frac{\cos n}{n}$

En posant :  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$  on a  $u_n = f(n)$

Comme  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

alors d'après le théorème « des gendarmes » on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

De là on peut écrire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$