

Fonction exponentielle

I) Définition de la fonction exponentielle

1) Théorème 1:

- Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :
Pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$
- Cette fonction est appelée fonction exponentielle.
On la note *exp*.

Démonstration exigible:

- L'existence d'une telle fonction est admise.
- Démontrons l'unicité d'une telle fonction :

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

▪ Montrons d'abord que pour tout nombre réel x , $f(x) \neq 0$

Soit k la fonction définie sur \mathbb{R} par : $k(x) = f(x) \times f(-x)$

$$k'(x) = (f(x) \times f(-x))' = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$$

(puisque $' = f$)

Donc k est une fonction constante

$$\text{Or } k(0) = f(0) \times f(0) = 1$$

Donc pour tout x de \mathbb{R} , $k(x) = 1$

Donc pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) \times f(-x) = 1$

$f(x) \neq 0$ car s'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$ alors on aurait :

$$f(a) \times f(-a) = 0 \text{ ce qui est impossible puisque } f(a) \times f(-a) = 1 \text{ donc } f(x) \neq 0$$

▪ Montrons maintenant l'unicité d'une telle fonction :

Soit g une fonction différente de f telle que g soit aussi une fonction dérivable sur \mathbb{R} avec $g' = g$ et $g(0) = 1$

$$\text{Soit } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

f et g sont définies et dérivables sur \mathbb{R} . g ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur \mathbb{R}

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x) \times g(x) - f(x) g(x)}{g^2(x)} = 0 \text{ puisque } f' = f \text{ et } g' = g$$

Donc la fonction h est constante

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc pour tout x de \mathbb{R} , $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = g(x)$

Ce qui prouve que f et g sont identiques. Ce qui prouve l'unicité de la fonction f .

2) Conséquences immédiates

• La fonction exponentielle $\exp : x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $(\exp)' = \exp$ et $\exp(0) = 1$

• Pour tout nombre x , $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Démonstration :

On sait que : $\exp(x)$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , $(\exp)' = \exp$ et $\exp(0) = 1$ par définition.

• Démontrons que pour tout x de \mathbb{R} , $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

$$f'(x) = (\exp(x) \times \exp(-x))' = \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x) = 0$$

Donc f est une fonction constante

$$\text{Or } f(0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1$$

Donc pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = 1$

Donc pour tout x de \mathbb{R} , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

Comme $\exp(x) \neq 0$ (nous l'avons démontré précédemment)

alors en divisant par $\exp(x)$ on obtient :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

II) Propriétés de la fonction exponentielle

1) Théorème 2:

Pour tous nombres réels a et b $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration :

Soit a un nombre réel et $h(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$

La fonction h est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$h'(x) = \frac{\exp'(a+x)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = h(x)$$

$$\text{de plus } h(0) = \frac{\exp(a+0)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$$

on a donc : $h' = h$ et $h(0) = 1$. Or d'après le théorème 1 il existe une unique fonction telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$ qui est : $h(x) = \exp(x)$

donc pour tout x de \mathbb{R} : $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$

on obtient donc : $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$

En particulier pour $x = b$: $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

2) Théorème 3:

Pour tous nombres a et b réels $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Démonstration :

Pour tous nombres a et b réels,

$\exp(a) = \exp(a-b+b)$ et $\exp(a-b+b) = \exp(a-b) \times \exp(b)$ en utilisant la propriété précédente.

On a donc : $\exp(a-b) \times \exp(b) = \exp(a)$

Comme $\exp(b) \neq 0$ alors on peut diviser par $\exp(b)$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

Théorème 4:

Pour tout nombre a réel et pour tout entier relatif n : $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration :

• Démontrons tout d'abord cette égalité par récurrence dans le cas où n est un entier naturel :

Pour tout entier naturel n , notons P_n la proposition: $\exp(na) = (\exp(a))^n$

P_1 est vraie. En effet lorsque $n = 1$ on obtient : $\exp(a) = (\exp(a))^1$

Supposons que pour **un entier n quelconque fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$$\exp(na) = (\exp(a))^n$$

$$\text{alors } \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na) \times \exp(a) = (\exp(a))^n \times \exp(a) = (\exp(a))^{n+1}$$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).

Donc pour tout entier naturel n : $\exp(na) = (\exp(a))^n$

• Démontrons maintenant cette égalité pour $n < 0$:

Posons $m = -n$ ($m > 0$)

$$\exp(na) = \exp(-ma) = \frac{1}{\exp(ma)} = \frac{1}{(\exp(a))^m} = (\exp(a))^{-m} = (\exp(a))^n$$

- Nous avons donc montré que pour tout entier relatif : $\exp(na) = (\exp(a))^n$

III) Nouvelle notation de la fonction exponentielle

On pose $e = \exp(1)$

Une calculatrice indique $e \approx 2,718281828$

Conséquences :

D'après le théorème 4, pour tout entier relatif n , $\exp(n) = ((\exp(1))^n$

On étend cette égalité à l'ensemble des nombres réels

On a donc :

Pour tout nombre x , $\exp(x) = e^x$

On le lit : « exponentielle de x » ou « e exposant x »

D'où les notations simplifiées :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

Pour tout nombre a et b :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$

- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

Pour tout nombre x et pour tout entier relatif n ,

- $(e^x)^n = e^{nx}$

IV fonction exponentielle

1) Variation de la fonction exponentielle

Théorème 5:

Pour tout nombre réel x , $e^x > 0$

Démonstration :

Pour tout nombre réel x , $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$

Donc $e^x \geq 0$

Comme $e^x \neq 0$ alors pour tout réel x , $e^x > 0$

Théorème 6:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration:

Pour tout nombre réel x , $(e^x)' = e^x$

Or pour tout réel x , $e^x > 0$

Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Conséquences importantes:

Pour tout nombres a et b :

- $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$
- $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$

Ces deux équivalences résultent de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

Elles sont surtout utilisées lors de la résolution d'équations et d'inéquations comme dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1: Résolvez l'équation suivante : $e^{3-x} = 1$

Cette équation équivaut à : $e^{3-x} = e^0$

qui est équivalente à l'équation : $3 - x = 0$

Donc $x = 3$

Cette équation a pour solution 3.

Exemple 2: Résolvez l'inéquation suivante : $e^{2x} < e^x$

Cette inéquation est équivalente à l'inéquation : $2x < x$
qui est équivalente à : $x < 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $] -\infty ; 0]$

Exemple 3: Résolvez l'équation suivante : $e^{2x} - 2e^x = -1$

Cette équation est équivalente à :

$$(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$$

Posons $X = e^x$ on obtient l'équation :

$$X^2 - 2X + 1 = 0$$

$$(X - 1)^2 = 0$$

Donc :

$$X = 1$$

On obtient donc :

$$e^x = 1$$

c'est-à-dire $e^x = e^0$

qui a pour solution : $x = 0$

Cette équation a pour solution 0

2) Limites à l'infini de la fonction exponentielle

Théorème 7:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Démonstration exigible:

• Tout d'abord démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison, en comparant les fonctions : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$

Pour cela étudions la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$

$$f'(x) = e^x - 1$$

Pour $x \geq 0$ $e^x \geq e^0$ (car la fonction exponentielle est croissante)

soit $e^x \geq 1$ et donc $e^x - 1 \geq 0$ et donc $f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante pour $x \geq 0$

Pour $x \leq 0$ $e^x \leq e^0$ (car la fonction exponentielle est croissante)

soit $e^x \leq 1$ et donc $e^x - 1 \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante pour $x \leq 0$

On obtient donc le tableau de variation de f ci-dessous :

| | | | |
|---------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | | | |

La fonction f admet 1 comme minimum

Par conséquent pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) \geq 1$ à fortiori, pour tout x de \mathbb{R} $f(x) > 0$

Pour tout x de \mathbb{R} , $e^x - x > 0$ soit **pour tout x de \mathbb{R} , $e^x > x$**

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

- Maintenant démontrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Pour cela, posons $y = -x$

Lorsque x tend vers $-\infty$ alors y tend vers $+\infty$

Ainsi, $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$

Or, $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$. **Ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$**

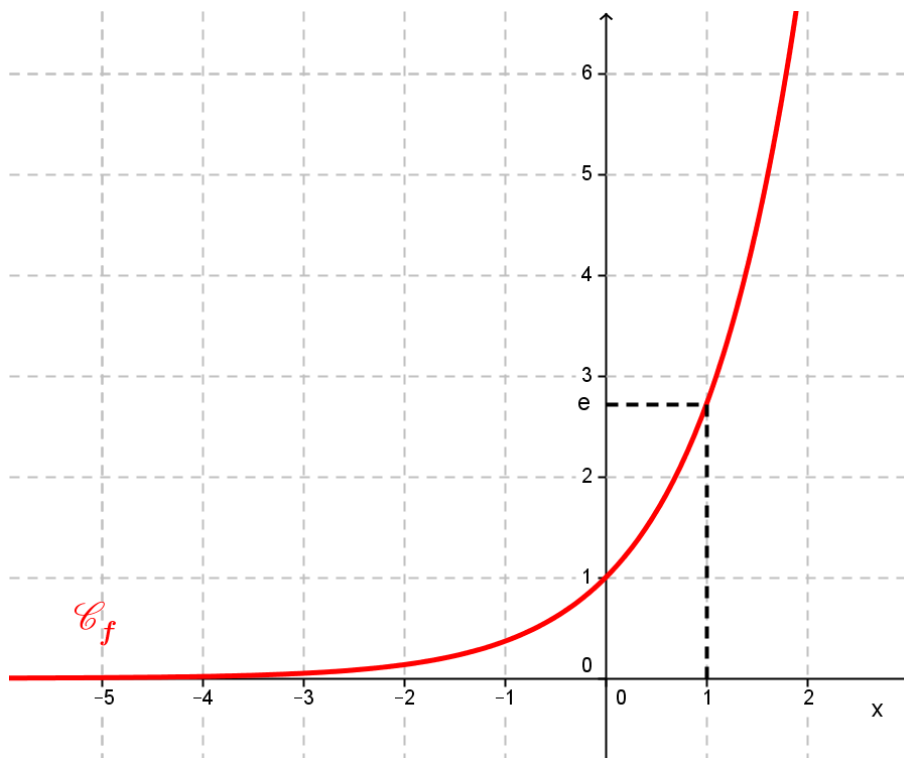
3) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

| | | | | |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | | $+$ | |
| $f(x)$ | | | | |

b) Courbe représentative de la fonction exponentielle



Remarque :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à \mathcal{C} en $-\infty$

c) Limites importantes

Théorème 8:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Démonstration :

- La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$ et $\exp(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x - 0}$$

C'est la limite lorsque x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et $0 + x$ on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = 1$$

On obtient donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison, en comparant les fonctions : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2}$

Pour cela étudions la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

$$f'(x) = e^x - x$$

Or, pour tout nombre x : $e^x > x$ (vu dans la démonstration du théorème 7)

Donc pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} , avec $f(0) = 1$

| | | | |
|---------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | | |

Ainsi pour tout nombre x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$

Ce qui prouve que tout x strictement positif $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$, soit en divisant par x (qui est non nul puisque strictement positif)

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème des comparaisons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- Maintenant démontrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Pour cela, posons $y = -x$

Lorsque x tend vers $-\infty$ alors y tend vers $+\infty$

Ainsi, $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$ et donc: $x e^x = -\frac{y}{e^y}$

Or nous venons de démontrer que: $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ on obtient donc : $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$

A fortiori on a donc : $\lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{y}{e^y} = 0$

Ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

V) Etude de la fonction : $e^{u(x)}$

• Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

• Comme la fonction exponentielle est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction u'

• Comme la fonction exponentielle est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de f est le même que celui de u .

• Pour tout x de I $e^{u(x)} > u(x)$

C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemples :

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{3x^2-5x+1}$

Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$$u'(x) = 6x - 5$$

$$u'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{5}{6} \quad u'(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq \frac{5}{6} \text{ et } u'(x) \leq 0 \text{ pour } x \leq \frac{5}{6}$$

$$f'(x) = (6x - 5) e^{3x^2-5x+1}$$

Comme e^{3x^2-5x+1} est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

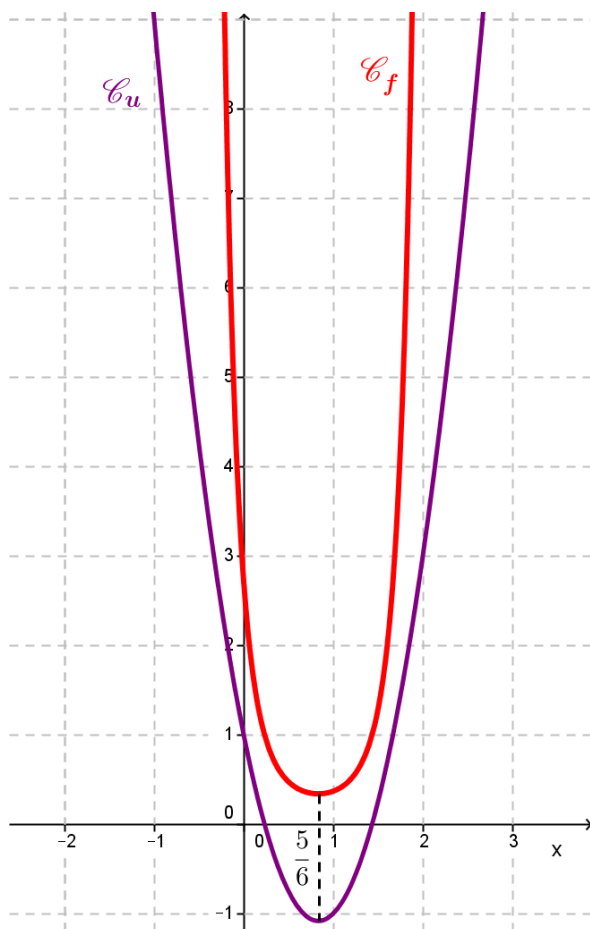
On obtient le tableau de variation suivant :

| | | | |
|---------|-----------|------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{5}{6}$ | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | | 0 | |
| | | $-$ | $+$ |
| $u(x)$ | $+\infty$ | $-\frac{13}{12}$ | $+\infty$ |

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ on obtient le tableau de variation de la fonction f :

| | | | |
|--------|-----------|----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{5}{6}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $e^{-\frac{13}{12}}$ | $+\infty$ |

Les courbes représentatives de fonctions u et f sont :



Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $u(x) = \frac{1}{x}$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$u'(x) < 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Comme $e^{\frac{1}{x}}$ est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant :

| | | | |
|---------|-----------|----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | - | | - |
| $u(x)$ | 0 | ↓ | $-\infty$ |
| | | ↑ | $+\infty$ |
| | | ↓ | 0 |

Sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, on obtient le tableau de variation de la fonction f :

| | | | |
|--------|-----------|----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 1 | ↓ | 0 |
| | | ↑ | $+\infty$ |
| | | ↓ | 1 |

Les courbes représentatives de fonctions u et f sont :

