Les nombres complexes.

I) Forme algébrique d'un nombre complexe

1) Introduction :

Dans l'ensemble des entiers naturels, une équation telle que $x + 2 = 5$ admet une solution 3.

Pour que l'équation $x + 5 = 2$ admette une solution, on doit introduire un ensemble plus grand (contenant $\mathbb{N}$) , qui est ici l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ ($x = -3$ en est la solution)

De même, pour résoudre l'équation $3x = 5$ on doit introduire un ensemble encore plus grand (contenant $\mathbb{Z}$), qui est ici l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ afin d'avoir là aussi une solution à cette équation ($x = \frac{5}{3}$)
De même, si on continue encore, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, on doit introduire un ensemble encore plus grand, contenant $\mathbb{Q}$, appelé l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ afin d'avoir une ou plusieurs solutions à cette équation. ($x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$ sont les deux solutions de cette équation.

Jusqu'à maintenant, lorsque vous deviez résoudre des équations telles que $x^2 = -1$ ou $x^2 = -4$ on disait qu'il n'y avait pas de solution dans $\mathbb{R}$

Lorsqu' une équation n'a pas de solution, une démarche naturelle et historique consiste à en chercher une dans un ensemble plus grand.

Au XVIéme siècle, en Italie certains mathématiciens ont utilisé des nombres dit « **imaginaires** » aux curieuses propriétés, leur permettant de résoudre des équations polynomiales de degré 3 et ont prouvé leur utilité.

Ces nombres sont aujourd'hui appelés « nombres complexes » dont leur ensemble est noté $\mathbb{C}$.

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'addition et la multiplication doivent prolonger les opérations de $\mathbb{R}$ et avoir les mêmes propriétés : commutativité, associativité, distributivité. Il y a seulement la propriété supplémentaire de l'existence de $\boldsymbol{i}$ dont le carré vaut -1. En effet, **la particularité de cet ensemble est qu'il existe un nombre $\boldsymbol{i}$ tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$**

Leur existence a été confirmée au travers de la résolution par Bombelli de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ selon une méthode mise au point par Cardan et Tartaglia.

En physique par exemple, les nombres complexes sont utilisés pour décrire le comportement d'oscillateurs électriques ou les phénomènes ondulatoires en électromagnétisme ($\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{ei\omega t})$ représentant une onde).

2) Forme algébrique d'un nombre complexe et définition

a) Théorème:

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ est tel que :

• $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels

• $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$

• $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication ayant les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$

• Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels.

Cette écriture est appelée la forme algébrique de z

b) Vocabulaire

Soit z un nombre complexe s'écrivant: $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

• Le nombre réel a est appelé partie réelle de z notée: $a = Re(z)$

• Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z notée: $b = Im(z)$

• Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

Conséquence :

Dire que le nombre complexe z est un nombre réel équivaut à dire que $Im(z) = 0$

Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $Re(z) = 0$

Exemples :

Soit z_1 le nombre complexe: $z_1 = 5 + 2i$ alors $Re(z_1) = 5$ et $Im(z_1) = 2$

Soit z_2 le nombre complexe: $z_2 = 9 - 5i$ alors $Re(z_2) = 9$ et $Im(z_2) = -5$

Soit z_3 le nombre complexe: $z_3 = 3$ alors $Re(z_3) = 3$ et $Im(z_3) = 0$ et z_3 est un nombre réel

Soit z_4 le nombre complexe: $z_4 = 7i$ alors $Re(z_4) = 0$ et $Im(z_4) = 7$ et z_4 est un imaginaire pur

c) Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Soit z et z' deux nombres complexes s'écrivant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

(a, b, a', b' sont des nombres réels)

$z = z'$ équivaut à : $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Remarque :

Soit z un nombre complexe s'écrivant $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels :
$z = 0$ équivaut à : $a = 0$ et $b = 0$

d) Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$.

Les propriétés de ces opérations dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$

Soit z et z' deux nombres complexes s'écrivant: $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où , a', b et b' sont des nombres réels alors :

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i\,(b + b')$

On a donc : $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$

$Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$

- $zz' = (a + ib)\,(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)$

Exemples :

$z = 5 - 2i$ et $z' = 4 + 3i$

$z + z' = 5 - 2i + 4 + 3i = 9 + i$

$zz' = (5 - 2i)(4 + 3i) = 20 + 15i - 8i - 6i^2 = 20 + 7i + 6 = 26 + 7i$

Il en résulte que les identités remarquables valables dans $\mathbb{R}$, le sont aussi dans $\mathbb{C}$:

- $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2iab - b^2$
- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

On peut donc factoriser dans $\mathbb{C}$ des expressions non factorisables dans $\mathbb{R}$:

Exemple:

$4x^2 + 9$ est factorisable dans $\mathbb{C}$ et :

$4x^2 + 9 = (2x)^2 - (3i)^2 = (2x + 3i)(2x - 3i)$

II) Conjugué d'un nombre complexe

1) Définition

Soit z le nombre complexe tel que: $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels. On appelle nombre complexe conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre nombre $a - ib$

$\overline{a - ib} = a + ib$ **$a - ib$ et $a + ib$ sont des nombres complexes conjugués.**

Exemples :

$\overline{1 - i} = 1 + i$ $\overline{2 + i\sqrt{2}} = 2 - i\sqrt{2}$ $\overline{-3i} = 3i$ $\overline{-3} = -3$

Conséquence :

$z = \overline{z}$ équivaut à z nombre réel

2) Opérations sur les nombres conjugués

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z \neq 0)$

Remarque : Ces résultats peuvent s'étendre à une somme de n termes ou à un produit d en facteurs.

En particulier, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z non nul :

$\overline{(z^n)} = (\overline{z}^n)$

Démonstrations :

Pour tout nombre complexe z et z' tel que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où , a', b et b' sont des nombres réels

• $\overline{z+z'} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \overline{z} + \overline{z'}$

• $zz' = (a + ib)\,(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)$ donc

$\overline{zz'} = \overline{(aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - i\,(ab' + a'b)$

D'autre part :

$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - ib'a - iba' + i^2bb' = aa' - bb' - i(b'a + ba') = \overline{zz'}$

Donc : $\overline{\boldsymbol{zz'}} = \overline{z} \times \overline{z'}$

• $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(\frac{a+ib}{a'+ib'}\right)} = \overline{\left(\frac{(a+ib)(a'-ib')}{a'^2-i^2b'}\right)} = \frac{\overline{aa'+bb'+i(ba'-b'a)}}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+bb'-i(ba'+b'a)}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+bb'-i(ba'+b'a)}{a'^2+b'^2}$

$= \frac{aa'+bb'+i(b'a-ba')}{a'^2+b'^2}$

D'autre part : $\frac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \frac{a-ib}{a'-ib'} = \frac{(a-ib)(a'+ib')}{(a'^2-i^2b'^2)} = \frac{aa'+bb'-iba'+ib'a}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+b+i(b'a-ba')}{a'^2+b'^2} = \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$

Donc: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

3) Relation fondamentale

Soit z le nombre complexe tel que: $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Démonstration:

Si $z = a + ib$ alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

4) Utilisation du conjugué

a) Forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe non nul

Soit z le nombre complexe tel que: $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels avec z non nul.

Alors $\frac{1}{z}$ est l'inverse du nombre z avec $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$

Exemples :

• **Inverse d'un nombre :**

$z = 7 + 3i$ et $\overline{z} = 7 - 3i$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{7-3i}{(7-3i)(7+3i)} = \frac{7}{58} + i\,\frac{-3}{58}$

• **Quotient de deux complexes :**

$z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 7 + 3i$ nous avons vu précédemment que : $\frac{1}{z_2} = \frac{7}{58} + i\,\frac{-3}{58}$

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = (5 - 2i) \times \left(\frac{7}{58} + i\,\frac{-3}{58} \right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{29}{58} + i\,\frac{-29}{58} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i$

$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i}$

III) Equations du second degré à coefficients réels

Théorème :

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$ où a, b, c réels a toujours des solutions :

• Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles

• Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle

• Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjugués :

$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ **avec** $z_2 = \overline{z_1}$

Conséquence: Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise toujours sous la forme :

$\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$

Exemples :

$2z^2 - 6z + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \times 2 \times 5 = -4 = (2i)^2$c

D'où les solutions complexes sont :

$z_1 = \frac{6+2i}{4}$ et $z_2 = \frac{6-2i}{4}$

$z_1 = \frac{3+i}{2}$ et $z_2 = \frac{3-i}{2}$