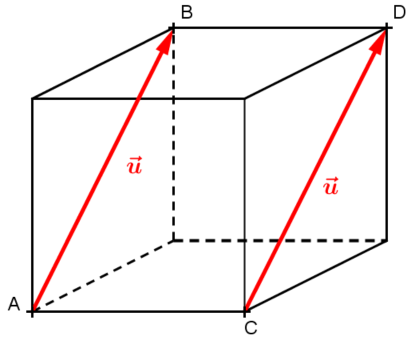
Géométrie vectorielle dans l'espace

I) Vecteurs de l'espace

1) Définition

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.



A tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$, définie de la manière suivante :

- Lorsque A $\neq$ B le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :

• pour direction : la droite (AB)

• pour sens : celui de A vers B

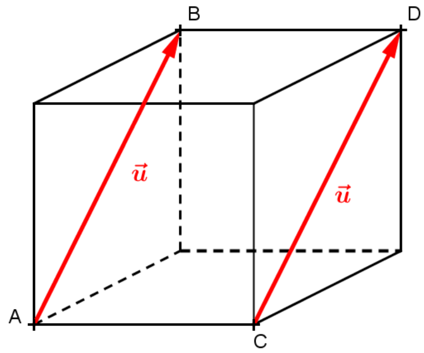
• pour longueur ou norme la distance AB. On note $\|\overrightarrow{AB}\|$ = AB

- Lorsque A = B le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté : $\vec{0}$

2) Propriétés

a) Propriété 1:

Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont :
La même direction, le même sens et la même longueur.
On le note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



b) Propriété 2:

Lorsque quatre points A, B , C et D ne sont pas alignés , $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à : ABDC est un parallélogramme.

c) Propriété 3:

Pour tout point A de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point C tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

d) Propriété 4:

Les opérations sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles sur les vecteurs du plan.

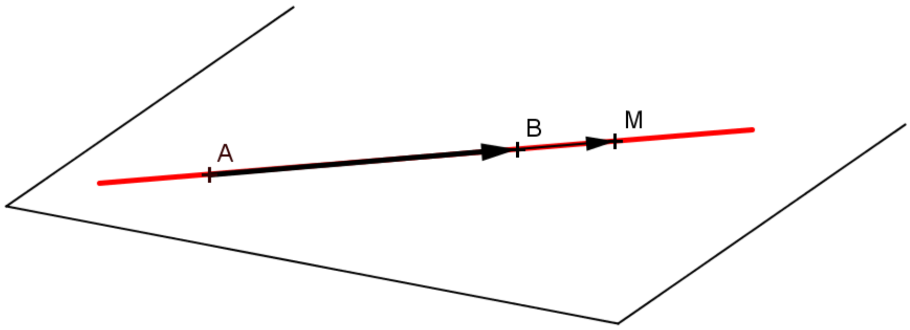
II) Caractérisation d'une droite, d'un plan

1) La droite

a) Définition

A et B sont deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, k étant un nombre réel quelconque.



b) Propriété

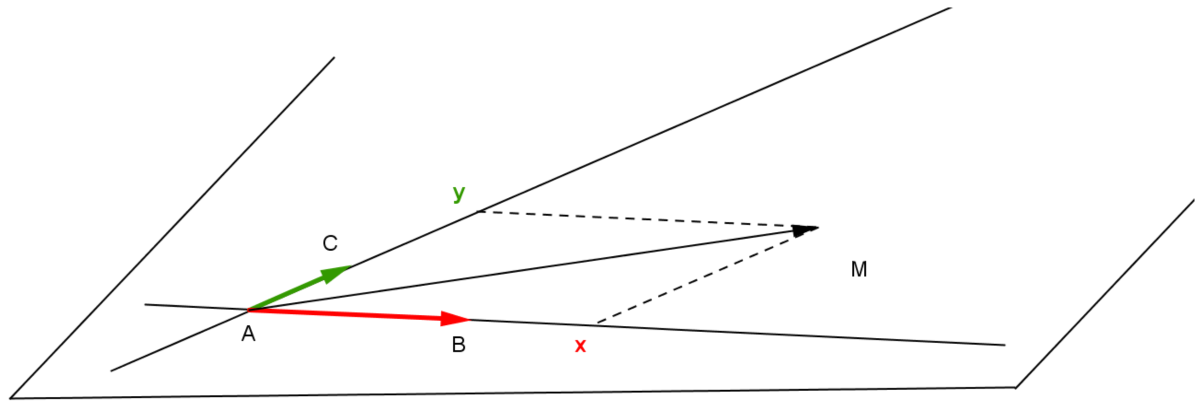
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$
Dire que trois points distincts A, B et C distincts sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc à dire qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

Remarque : Une droite peut être définie de deux façons équivalentes : par la donnée de deux points A et B non confondus ou par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul.

2) Le plan

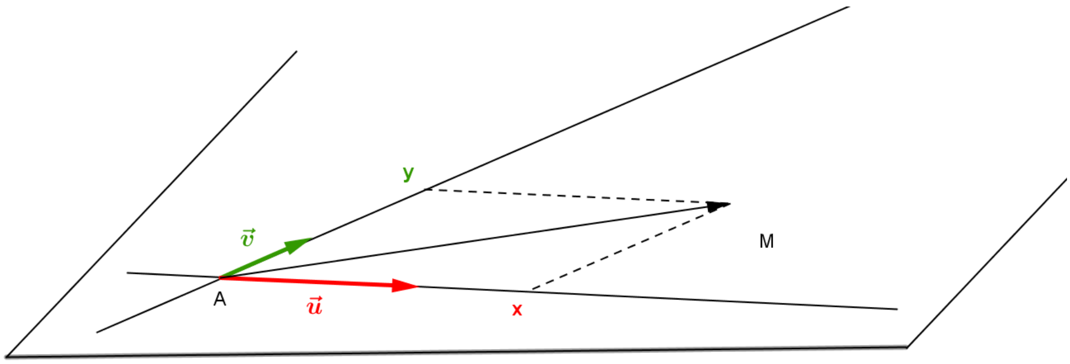
a) Définition

A, B et C sont trois points non alignés.
Le plan (A, B, C) est l'ensemble des points M définis par :
$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$
x et y étant deux nombres quelconques.



On peut définir un plan de deux façons différentes :

- **Donner trois points A, B et C non alignés ou**
- **Donner un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires**



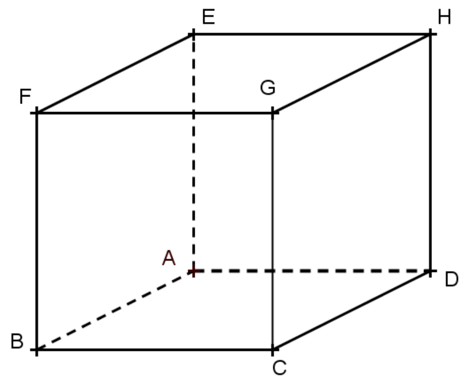
III) Vecteurs coplanaires

1) Définition

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des nombres réels a et b tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Exemples :

Pour le cube dessiné ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$ et les points A,E, F et B sont coplanaires.



Les droites (EF) et (CH) ne sont pas coplanaires mais les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$

Remarque : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.